

Appunti di Programmazione Matematica

Canale 1 · Prof. Marco Sciandrone

Capitolo 5: Successioni

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dalle lezioni in aula e dal materiale del corso

Argomenti: Successioni in $\mathbb{R}^n$ · Sottosuccessioni · Limite di una successione
Convergenti, divergenti, irregolari · Punti limite · Bolzano-Weierstrass
Successioni in un compatto · Bolzano-Weierstrass per insiemi

Indice

1	Successioni in $\mathbb{R}^n$	1
2	Sottosuccessioni	1
3	Limite di una successione	2
4	Punti limite	4
5	Successioni limitate e teorema di Bolzano-Weierstrass	5
5.1	Due risultati in $\mathbb{R}$	5
5.2	Componenti di una successione	6
5.3	Bolzano-Weierstrass in $\mathbb{R}^n$	7
6	Compatti e punti di accumulazione	9
7	Esercizi	10
8	Soluzioni	12

1 Successioni in $\mathbb{R}^n$

Definizione – Successione

Una **successione** in $\mathbb{R}^n$ è una funzione che a ogni naturale k associa un vettore $x_k \in \mathbb{R}^n$, il **termine** di indice k :

$$k \in \mathbb{N} \mapsto x_k \in \mathbb{R}^n.$$

Si indica con $\{x_k\}$. Il dominio può essere anche, per un $\bar{k} \in \mathbb{N}$,

$$\{k \in \mathbb{N} : k \geq \bar{k}\}.$$

È un caso particolare di funzione, a valori reali per $n = 1$ e vettoriali per $n > 1$ (Capitolo 2), con dominio $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. L'altro dominio serve quando i primi termini non sono definiti: $x_k = 1/k$ ha senso solo per $k \geq 1$.

2 Sottosuccessioni

Definizione – Sottosuccessione

Sia $K = \{k_1, k_2, k_3, \dots\}$ un insieme infinito di indici del dominio di $\{x_k\}$, con $k_1 < k_2 < k_3 < \dots$. La **sottosuccessione** di $\{x_k\}$ di indici K è la successione $\{y_i\}$ con

$$y_i = x_{k_i}, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Si indica anche con $\{x_k\}_K$.

Il primo termine è quello di indice k_1 , il secondo quello di indice k_2 , e così via: si scartano alcuni termini, anche infiniti, e se ne tengono infiniti, nell'ordine in cui compaiono.

Esempio – Gli indici pari

Per una successione definita su tutto $\mathbb{N}$, con $K = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$ la sottosuccessione è

$$x_0, x_2, x_4, x_6, \dots$$

cioè $y_1 = x_0, y_2 = x_2, y_3 = x_4$: si scartano i termini di indice dispari.

3 Limite di una successione

Proposizione – Accumulazione di $\mathbb{N}$

L'unico punto di accumulazione di $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}^*$ è $+\infty$.

Ogni intorno $\{x > A\}$ di $+\infty$ contiene naturali, mentre $\{x < 0\}$, intorno di $-\infty$, non ne contiene. Per $x_0 \in \mathbb{R}$ l'intervallo $\mathcal{B}_{1/2}(x_0)$, lungo 1, contiene al più un naturale, e un intorno sferico più piccolo non ne contiene nessuno diverso da x_0 .

Il limite si studia solo nei punti di accumulazione del dominio (Capitolo 4): per una successione c'è solo $k \rightarrow +\infty$, che si scrive $k \rightarrow \infty$. Il limite, se esiste, è un vettore $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ oppure l'elemento ∞ di $\mathbb{R}_*^n$, anche per $n = 1$.

Definizione – Limite di una successione

Si scrive $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \bar{x} \in \mathbb{R}^n$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un indice k_ε tale che

$$k \geq k_\varepsilon \implies \|x_k - \bar{x}\| < \varepsilon.$$

È la definizione di limite del Capitolo 4 con dominio $\mathbb{N}$ e punto $+\infty$: gli indici da k_ε in poi formano un intorno di $+\infty$ in $\mathbb{N}$, e i termini devono stare in un intorno sferico di $\bar{x}$. Con $k > k_\varepsilon$ la definizione non cambia.

Definizione – Limite ∞ di una successione

Si scrive $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \infty$ se per ogni $M > 0$ esiste un indice k_M tale che

$$k \geq k_M \implies \|x_k\| > M.$$

I termini entrano in ogni intorno di ∞ , come per il limite ∞ di una funzione a valori vettoriali (Capitolo 4).

La definizione vale per ogni n , anche $n = 1$: per una successione reale la norma è il valore assoluto, e il segno dei termini non conta. Se la successione tende a $+\infty$ o a $-\infty$ in $\mathbb{R}^*$ (Capitolo 4), allora diverge. Il viceversa è falso: $x_k = (-1)^k k$ diverge, ma non ha limite in $\mathbb{R}^*$, perché i termini pari crescono verso $+\infty$ e i dispari scendono verso $-\infty$.

Definizione – Carattere di una successione

Una successione $\{x_k\}$ è **convergente** o **divergente** se, rispettivamente,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \bar{x} \in \mathbb{R}^n \quad \text{oppure} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \infty.$$

È **irregolare** se non è né convergente né divergente.

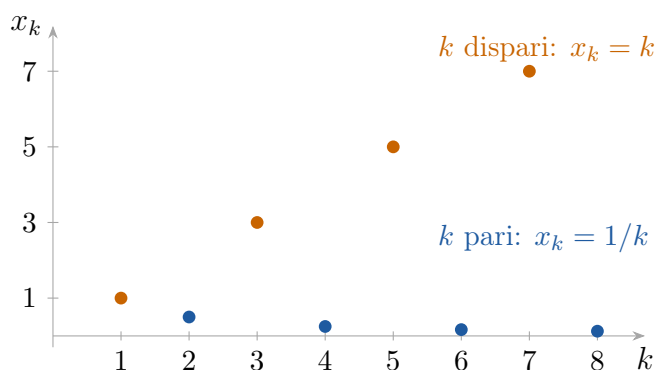
Per l'unicità del limite (Capitolo 4) i tre casi si escludono a vicenda. L'Esercizio 1 mette alla prova queste definizioni.

Esempio – Una successione irregolare

Per $k \geq 1$ sia

$$x_k = \begin{cases} 1/k & \text{se } k \text{ è pari,} \\ k & \text{se } k \text{ è dispari.} \end{cases}$$

I termini sono $1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{6}, \dots$: la sottosuccessione degli indici pari tende a 0, quella degli indici dispari a ∞ . La successione è irregolare.



I termini di indice dispari crescono senza limite, quelli di indice pari si avvicinano a 0.

La successione non converge: dato $\bar{x} \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon = 1$, ogni indice dispari $k > |\bar{x}| + 1$ ha $|x_k - \bar{x}| \geq k - |\bar{x}| > 1$, e indici così ce ne sono oltre ogni k_ε . Non diverge: con $M = 1$, oltre ogni k_M c'è un indice pari $k \geq 2$, e $|x_k| = 1/k < 1$.

Osservazione – Successioni e algoritmi

Un algoritmo numerico parte da un punto iniziale x_0 e a ogni iterazione k ne calcola uno nuovo, x_{k+1} : genera una successione $\{x_k\}$ in $\mathbb{R}^n$. Si vuole che la successione converga a un punto $\bar{x}$ che sia soluzione del problema.

Progettare un algoritmo vuol dire progettare il modo in cui genera la successione, e poi dimostrare che è ben definito, che converge a una soluzione e quanto costa.

4 Punti limite

Definizione – Punto limite

$\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ è un **punto limite** di $\{x_k\}$ se è il limite di una sua sottosuccessione $\{x_k\}_K$:

$$\lim_{\substack{k \in K \\ k \rightarrow \infty}} x_k = \hat{x}.$$

Il limite su K si definisce come il limite di una successione, con $k \in K$: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste k_ε tale che $\|x_k - \hat{x}\| < \varepsilon$ per ogni $k \in K$ con $k \geq k_\varepsilon$. Il limite riguarda tutta la successione, un punto limite solo una sua parte.

Proposizione – Sottosuccessioni di una successione convergente

Se $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \bar{x}$, ogni sottosuccessione di $\{x_k\}$ converge a $\bar{x}$. Quindi $\bar{x}$ è l'unico punto limite di $\{x_k\}$.

Dimostrazione

1. Gli indici $k_1 < k_2 < \dots$ sono naturali crescenti, quindi $k_i \geq i - 1$.
2. Dato $\varepsilon > 0$, per $i \geq k_\varepsilon + 1$ si ha $k_i \geq k_\varepsilon$, e quindi $\|x_{k_i} - \bar{x}\| < \varepsilon$.
3. Ogni punto limite è il limite di una sottosuccessione, cioè $\bar{x}$, per l'unicità del limite (Capitolo 4).

□

Due punti limite distinti bastano quindi a dire che la successione non converge. Il viceversa è falso: la successione irregolare della Sezione 3 ha il punto limite 0, dagli indici pari, ma non converge.

Esempio – Due punti limite

Per $k \in \mathbb{N}$ sia

$$x_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/(k+1) \end{pmatrix} \text{ se } k \text{ è pari,} \quad x_k = \begin{pmatrix} -2 \\ 1/(k+1) \end{pmatrix} \text{ se } k \text{ è dispari.}$$

Con $K_1 = \{0, 2, 4, \dots\}$ e $K_2 = \{1, 3, 5, \dots\}$:

$$\lim_{\substack{k \in K_1 \\ k \rightarrow \infty}} x_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lim_{\substack{k \in K_2 \\ k \rightarrow \infty}} x_k = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ha due punti limite, quindi non converge. Non diverge, perché $\|x_k\|_2 \leq \sqrt{4+1} < 3$ per ogni k : è irregolare.

5 Successioni limitate e teorema di Bolzano-Weierstrass

Definizione – Successione limitata

$\{x_k\}$ è **limitata** se la norma dei suoi termini non supera una costante:

$$\exists M > 0 : \quad \|x_k\| \leq M \quad \forall k.$$

Altrimenti è **illimitata**.

Equivale a dire che l'insieme dei termini $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ è limitato (Capitolo 3).

5.1 Due risultati in $\mathbb{R}$

Definizione – Successione monotona

Una successione reale $\{x_k\}$ è **crescente** se $x_{k+1} \geq x_k$ per ogni k , e **decrescente** se $x_{k+1} \leq x_k$ per ogni k . È **monotona** se è crescente o decrescente.

Con l'uguale ammesso, una successione crescente si dice anche non decrescente, e una decrescente non crescente.

Teorema – Successioni monotone

Una successione reale monotona ha limite in $\mathbb{R}^*$:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \sup_k x_k \text{ se è crescente,} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \inf_k x_k \text{ se è decrescente.}$$

Se è limitata il limite è finito; altrimenti è $+\infty$ (crescente) o $-\infty$ (decrescente).

L'Esercizio 2 lo applica ai valori $f(x_k)$ di una funzione.

Il risultato non si estende a $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 2$: la monotonia richiede un ordine totale, e $\mathbb{R}^n$ non è totalmente ordinato (Capitolo 2).

Teorema – Bolzano-Weierstrass in $\mathbb{R}$

Ogni successione reale limitata ammette almeno una sottosuccessione convergente.

Questo invece si estende a $\mathbb{R}^n$, componente per componente.

5.2 Componenti di una successione

Il termine $x_k \in \mathbb{R}^n$ ha componenti $(x_k)_1, \dots, (x_k)_n$: per ogni i , $\{(x_k)_i\}$ è una successione reale, la **successione della componente i** .

Proposizione – Limitatezza e convergenza per componenti

Con la norma euclidea:

1. $\{x_k\}$ è limitata se e solo se ogni $\{(x_k)_i\}$ è limitata;
2. $x_k \rightarrow \bar{x}$ se e solo se $(x_k)_i \rightarrow \bar{x}_i$ per ogni $i = 1, \dots, n$.

Lo stesso vale lungo un insieme di indici K .

Dimostrazione

Per ogni $y \in \mathbb{R}^n$ e ogni i vale $|y_i| \leq \|y\|_2 \leq |y_1| + |y_2| + \dots + |y_n|$.

1. Con $y = x_k$: se $\|x_k\|_2 \leq M$ allora $|(x_k)_i| \leq M$; se $|(x_k)_i| \leq M_i$ per ogni i , allora $\|x_k\|_2 \leq M_1 + \dots + M_n$.
2. Con $y = x_k - \bar{x}$: se $\|x_k - \bar{x}\|_2 < \varepsilon$ anche ogni componente dista meno di ε . Viceversa, se da k_i in poi $|(x_k)_i - \bar{x}_i| < \varepsilon/n$, da $\max_i k_i$ in poi $\|x_k - \bar{x}\|_2 < \varepsilon$.

□

Esempio – Una successione in $\mathbb{R}^4$

$$x_k = \begin{pmatrix} 1/(k+1) \\ 2 \\ -1 \\ (-1)^k \end{pmatrix}$$

è limitata: $|1/(k+1)| \leq 1$, le due costanti sono limitate e $|(-1)^k| = 1$. Se la seconda componente è k al posto di 2, la successione è illimitata, perché quella componente lo è.

5.3 Bolzano-Weierstrass in $\mathbb{R}^n$

Teorema – Bolzano-Weierstrass per successioni

Ogni successione $\{x_k\}$ in $\mathbb{R}^n$ limitata ammette almeno una sottosuccessione convergente: esistono K e $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tali che

$$\lim_{\substack{k \in K \\ k \rightarrow \infty}} x_k = \bar{x}.$$

Ogni successione limitata ha quindi almeno un punto limite. L'Esercizio 1 lo confronta con le altre affermazioni sul carattere.

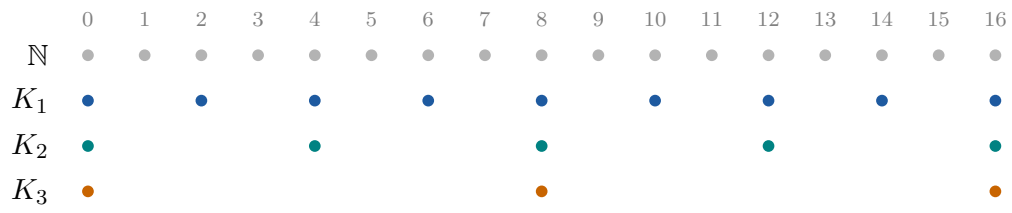
Dimostrazione

Le successioni delle componenti sono limitate (proposizione precedente).

1. **Prima componente.** $\{(x_k)_1\}$ è reale e limitata: per Bolzano-Weierstrass in $\mathbb{R}$ esiste K_1 con $(x_k)_1 \rightarrow \bar{x}_1$ per $k \in K_1$.
2. **Seconda componente.** Lungo K_1 , $\{(x_k)_2\}$ è ancora limitata: esiste $K_2 \subseteq K_1$ con $(x_k)_2 \rightarrow \bar{x}_2$ per $k \in K_2$. Lungo K_2 anche la prima componente tende a $\bar{x}_1$, perché K_2 dà una sottosuccessione di quella su K_1 .
3. **Le altre.** Si ripete fino alla componente n : $K_n \subseteq K_{n-1} \subseteq \dots \subseteq K_1$, e lungo K_n ogni componente i tende a $\bar{x}_i$.
4. **Conclusione.** Per la convergenza per componenti, $x_k \rightarrow \bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)^T$ per $k \in K_n$.

□

Il punto delicato è il gioco degli indici: ogni componente si estrae lungo gli indici già scelti per le precedenti, così la convergenza ottenuta prima non si perde. L'ordine delle componenti non conta: si può partire da una qualsiasi, purché ogni estrazione avvenga fra gli indici scelti per le componenti già trattate.



Insiemi di indici annidati: ogni riga sceglie fra gli indici della riga sopra.

6 Compatti e punti di accumulazione

Proposizione – Successioni in un compatto

Siano $E \subseteq \mathbb{R}^n$ compatto e $\{x_k\}$ con $x_k \in E$ per ogni k . Allora esistono K e $\bar{x} \in E$ tali che

$$\lim_{\substack{k \in K \\ k \rightarrow \infty}} x_k = \bar{x}.$$

Dimostrazione

1. E è limitato, quindi anche $\{x_k\}$: per Bolzano-Weierstrass esistono K e $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ con $x_k \rightarrow \bar{x}$ per $k \in K$.
2. Se $\bar{x} \notin E$, ogni intorno $\mathcal{B}_\rho(\bar{x})$ contiene i termini x_k con $k \in K$ abbastanza grande: sono punti di E , diversi da $\bar{x}$ perché $\bar{x} \notin E$. Quindi $\bar{x}$ è di accumulazione per E .
3. E è chiuso, quindi contiene i suoi punti di accumulazione (Capitolo 3): $\bar{x} \in E$, contro l'ipotesi del punto 2.

□

Le due proprietà del compatto hanno ruoli diversi: la limitatezza dà l'esistenza del punto limite, la chiusura la sua appartenenza a E .

Teorema – Bolzano-Weierstrass per insiemi

Ogni insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ limitato e con infiniti punti ha almeno un punto di accumulazione.

Dimostrazione

1. E ha infiniti punti: si sceglie una successione $\{x_k\}$ di punti di E distinti fra loro.
2. E è limitato, quindi anche $\{x_k\}$: per Bolzano-Weierstrass per successioni esistono K e $\bar{x}$ con $x_k \rightarrow \bar{x}$ per $k \in K$.
3. Dato $\rho > 0$, per la definizione di limite esiste k_ρ tale che $x_k \in \mathcal{B}_\rho(\bar{x})$ per ogni $k \in K$ con $k \geq k_\rho$. Questi termini sono infiniti e distinti, quindi al più uno coincide con $\bar{x}$: l'intorno contiene un punto di E diverso da $\bar{x}$, e $\bar{x}$ è di accumulazione per E .

□

Nel passo 3 servono punti distinti. Una successione che da un certo indice in poi vale sempre $\bar{x}$ tende a $\bar{x}$, ma non dà punti di E diversi da $\bar{x}$ vicino a $\bar{x}$.

Lo stesso $\bar{x}$ è quindi punto limite della successione e punto di accumulazione dell'insieme. Il teorema non dice che $\bar{x}$ stia in E : ci sta se E è anche chiuso.

Riepilogo

- **Successione e sottosuccessione:** $k \mapsto x_k$; $y_i = x_{k_i}$ con $k_1 < k_2 < \dots$.
- **Limite:** solo per $k \rightarrow \infty$; $\|x_k - \bar{x}\| < \varepsilon$ da k_ε in poi; limite ∞ : $\|x_k\| > M$ da k_M in poi.
- **Carattere:** convergente, divergente o irregolare (né l'una né l'altra).
- **Punto limite:** limite di una sottosuccessione; una convergente ne ha uno solo.
- **Monotone in $\mathbb{R}$:** limite sup o inf in $\mathbb{R}^*$, finito se limitata.
- **Bolzano-Weierstrass:** limitata in $\mathbb{R}^n \Rightarrow$ sottosuccessione convergente.
- **Algoritmi:** generano $\{x_k\}$ da x_0 ; si vuole che converga a una soluzione.
- **Compatti e insiemi:** in un compatto il punto limite sta nell'insieme; limitato e infinito $\Rightarrow$ un punto di accumulazione.

7 Esercizi

Esercizio 1 – Appello del 29/01/2024, Canale M-Z, Prof. Giampaolo Liuzzi, domanda 6

Sia $\{x_k\}$ una successione a valori in $\mathbb{R}^n$. Individuare l'affermazione corretta.

- Se $\{x_k\}$ non è convergente, allora esiste almeno una sottosuccessione convergente.
- Se $\{x_k\}$ non è divergente, allora è convergente.
- Se $\{x_k\}$ è limitata, allora esiste una sottosuccessione convergente.
- Se $\{x_k\}$ è illimitata, allora è divergente.

Soluzione a pagina 12 $\rightarrow$

Esercizio 2 – Appello di Analisi Matematica II del 02/02/2024, Canale M-Z, Prof. Giampaolo Liuzzi, test vero/falso A turno II, domanda 2

Siano $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $\{x_k\}$ una successione di punti. Dire se ciascuna affermazione è vera o falsa.

- Se $f(x_{k+1}) < f(x_k)$, allora $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = \bar{f} > -\infty$.

- (b) Se $f(x_{k+1}) \leq f(x_k)$, allora $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = \bar{f} > -\infty$.
- (c) Se $f(x_{k+1}) \leq f(x_k)$ e f è limitata inferiormente, allora $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = \bar{f} > -\infty$.
- (d) Se $f(x_{k+1}) \leq f(x_k)$ e f è limitata inferiormente, allora $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \bar{x}$.

Soluzione a pagina 12 →

8 Soluzioni

Soluzione dell'Esercizio 1 – Appello del 29/01/2024, Canale M-Z, Prof. Giampaolo Liuzzi, domanda 6

È corretta la (c): è il teorema di Bolzano-Weierstrass per successioni. Le altre sono false.

(a) Sia $x_k = k e_1$ per $k \in \mathbb{N}$, con e_1 il vettore di $\mathbb{R}^n$ con prima componente 1 e le altre nulle, e la norma euclidea. Una sottosuccessione ha indici naturali crescenti, quindi $k_i \geq i - 1$ e $\|y_i\|_2 = k_i \geq i - 1$. Dato $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\varepsilon = 1$, per la disuguaglianza triangolare

$$\|y_i - \bar{x}\|_2 \geq \|y_i\|_2 - \|\bar{x}\|_2 \geq i - 1 - \|\bar{x}\|_2 > 1 \quad \text{per } i > \|\bar{x}\|_2 + 2 :$$

nessuna sottosuccessione converge. Con $K = \mathbb{N}$ la sottosuccessione è la successione stessa, che quindi non è convergente.

(b) La successione irregolare della Sezione 3 ($n = 1$) non è divergente e non è convergente.

(d) La stessa successione è illimitata, perché per ogni $M > 0$ un indice dispari $k > M$ ha $|x_k| = k > M$; ma non è divergente.

[← Torna all'Esercizio 1, pagina 10](#)

Soluzione dell'Esercizio 2 – Appello di Analisi Matematica II del 02/02/2024, Canale M-Z, Prof. Giampaolo Liuzzi, test vero/falso A turno II, domanda 2

(a) Falsa. Con $f(x) = x_1$ e $x_k = -k e_1$ (e_1 come nell'esercizio precedente) si ha $f(x_k) = -k$: $f(x_{k+1}) < f(x_k)$ per ogni k , ma $f(x_k) \rightarrow -\infty$.

(b) Falsa: lo stesso esempio, perché $<$ implica $\leq$.

(c) Vera. $\{f(x_k)\}$ è una successione reale decrescente, quindi ha limite $\bar{f} = \inf_k f(x_k)$ in $\mathbb{R}^*$. Se $f(x) \geq m$ per ogni x , allora $f(x_k) \geq m$ per ogni k , e quindi $\bar{f} \geq m > -\infty$.

(d) Falsa. Con $f(x) = 0$ per ogni x le ipotesi valgono. Per $x_k = (-1)^k e_1$ la sottosuccessione dei pari vale sempre e_1 e quella dei dispari $-e_1$: due punti limite distinti, quindi $\{x_k\}$ non converge.

[← Torna all'Esercizio 2, pagina 10](#)