

Appunti di Programmazione Matematica

Canale 1 · Prof. Marco Sciandrone

Capitolo 6: Funzioni lineari e quadratiche

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dalle lezioni in aula e dal materiale del corso

Argomenti: Funzioni lineari e affini · Forme quadratiche · Funzioni quadratiche ·
Matrice simmetrica

Indice

1	Funzioni lineari	1
2	Forme e funzioni quadratiche	2
3	La matrice simmetrica	3

1 Funzioni lineari

Definizione – Funzione lineare

Una funzione $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ è **lineare** se vale il principio di sovrapposizione degli effetti: per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$ e ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$F(\alpha x + \beta y) = \alpha F(x) + \beta F(y).$$

Proposizione – Forma delle funzioni lineari

- $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ è lineare se e solo se esiste una matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tale che

$$F(x) = Ax \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

- In particolare $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è lineare se e solo se esiste $c \in \mathbb{R}^n$ tale che

$$f(x) = c^\top x = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n.$$

A ha m righe, quante le componenti di $F(x)$, e n colonne, quante le variabili. Per $m = 1$ la matrice è una riga, $c^\top$.

Dimostrazione

1. Se $F(x) = Ax$, la sovrapposizione è la proprietà distributiva del prodotto matrice per vettore: $A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$.
2. Se F è lineare, si scrive $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$, con e_j il vettore con 1 in posizione j e 0 altrove. Per la sovrapposizione $F(x) = x_1 F(e_1) + \cdots + x_n F(e_n) = Ax$, dove A ha per colonne $F(e_1), \dots, F(e_n)$.

□

Definizione – Funzione affine

Una funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è **affine** se è una funzione lineare più un termine noto $b \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = c^\top x + b.$$

È una funzione lineare traslata. Con $b \neq 0$ non è lineare: con $\alpha = \beta = 0$ la sovrapposizione dà $F(0) = 0$ per ogni funzione lineare, mentre qui $f(0) = b$.

Esempio – Riconoscere una funzione lineare

- $f(x) = -3x_1 + 2x_2 - 6x_3 + 4x_4$ è lineare: è $c^\top x$ con

$$c = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

- $g(x_1, x_2) = e^{3x_1+4x_2}$ non è lineare, anche se l'argomento dell'esponenziale lo è:
 $g(0, 0) = e^0 = 1 \neq 0$.

2 Forme e funzioni quadratiche

Definizione – Forma quadratica

Una **forma quadratica** in n variabili è un polinomio omogeneo di secondo grado: ogni termine ha somma degli esponenti uguale a 2. Con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ di elementi a_{ij} si scrive

$$q(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j = x^\top A x.$$

Per $n = 1$ è ax^2 , la funzione non lineare più semplice. Per $n = 2$ la stessa forma ha tre scritture equivalenti, esplicita, con la sommatoria e con matrici e vettori:

$$a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 a_{ij} x_i x_j = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

L'ultima uguaglianza si ottiene moltiplicando prima la riga per la matrice:

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 & a_{12}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = a_{11}x_1^2 + a_{21}x_2x_1 + a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2.$$

Definizione – Funzione quadratica

Una **funzione quadratica** è una forma quadratica più un termine lineare e un termine noto: con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $c \in \mathbb{R}^n$ e $b \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = x^\top A x + c^\top x + b.$$

È un polinomio di secondo grado. Da una a n variabili cambia solo il tipo degli oggetti:

	una variabile	n variabili
forma quadratica	ax^2	$x^\top Ax$
funzione affine	$cx + b$	$c^\top x + b$
funzione quadratica	$ax^2 + cx + b$	$x^\top Ax + c^\top x + b$

3 La matrice simmetrica

Esempio – Tre matrici per la stessa forma

Poiché $x_1x_2 = x_2x_1$, conta solo la somma dei coefficienti dei due termini misti:

$$\begin{aligned} q(x) &= -3x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_1 + 6x_2^2 \\ &= -3x_1^2 + x_1x_2 + 5x_2x_1 + 6x_2^2 \\ &= -3x_1^2 + 3x_1x_2 + 3x_2x_1 + 6x_2^2. \end{aligned}$$

Quindi $q(x) = x^\top A_i x$ per ciascuna delle matrici

$$A_1 = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Solo A_3 è simmetrica: i suoi elementi fuori diagonale sono la media $(2 + 4)/2 = 3$.

Proposizione – Rappresentazione simmetrica

Per ogni $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matrice

$$S = \frac{1}{2}(A + A^\top)$$

è simmetrica, e $x^\top Ax = x^\top Sx$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$.

Ogni forma quadratica, e quindi ogni funzione quadratica, si può scrivere con una matrice simmetrica senza perdita di generalità. La proposizione non dice che $A = S$: nell'esempio $A_1 \neq A_3$, ma le due forme hanno gli stessi valori. Per $n = 2$, S è la matrice con gli elementi fuori diagonale sostituiti dalla loro media.

Dimostrazione

Si usa la regola della trasposta di un prodotto, $(BCD)^T = D^T C^T B^T$.

1. $S^T = \frac{1}{2}(A^T + A) = S$, perché $(A^T)^T = A$.
2. $x^T A^T x$ è uno scalare, quindi è uguale al proprio trasposto: $x^T A^T x = (x^T A^T x)^T = x^T A x$.
3. Allora $x^T S x = \frac{1}{2} x^T A x + \frac{1}{2} x^T A^T x = \frac{1}{2} x^T A x + \frac{1}{2} x^T A x = x^T A x$.

□

Proposizione – Memoria di una matrice simmetrica

Una matrice simmetrica $n \times n$ è determinata dagli elementi a_{ij} con $i \leq j$, che sono

$$n + (n - 1) + \cdots + 2 + 1 = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

Basta memorizzare la prima riga (n elementi), la seconda dalla diagonale in poi ($n - 1$), e così via fino all'ultimo elemento diagonale; la somma è la formula di Gauss. È il vantaggio algoritmico della scelta simmetrica: circa metà degli n^2 elementi di una matrice qualsiasi.

Riepilogo

- **Lineare:** $F(\alpha x + \beta y) = \alpha F(x) + \beta F(y)$, cioè $F(x) = Ax$ con $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$; scalare: $f(x) = c^T x$.
- **Affine:** $f(x) = c^T x + b$; con $b \neq 0$ non è lineare.
- **Forma quadratica:** $q(x) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j = x^T A x$.
- **Funzione quadratica:** $f(x) = x^T A x + c^T x + b$.
- **Simmetrica:** $x^T A x = x^T \frac{1}{2}(A + A^T) x$, ma in generale $A \neq \frac{1}{2}(A + A^T)$.
- **Memoria:** una matrice simmetrica richiede $n(n + 1)/2$ elementi.