

Appunti di Programmazione Matematica

Canale 1 · Prof. Marco Sciandrone

Capitolo 7: Il metodo di Newton per gli zeri

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dalle lezioni in aula e dal materiale del corso

Argomenti: Approssimazione lineare · Iterazione di Newton · Convergenza locale e
globale
Convergenza asintotica e finita · Multi-start

Indice

1	Il problema e l'idea	1
2	Il metodo di Newton	1
3	Convergenza	2

1 Il problema e l'idea

Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile. Si cerca uno **zero** di f , cioè un punto $\bar{x} \in \mathbb{R}$ tale che

$$f(\bar{x}) = 0,$$

ammesso che esista. Se f è affine (Capitolo 6) l'equazione si risolve a mano; qui f è non lineare, per esempio un polinomio di grado alto, un esponenziale, un seno.

Definizione – Approssimazione lineare

L'**approssimazione lineare** di f nel punto x_0 è la funzione affine

$$\hat{f}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

È affine perché si scrive $\hat{f}(x) = cx + b$, con $c = f'(x_0)$ e $b = f(x_0) - f'(x_0)x_0$. Il grafico di $\hat{f}$ è la retta tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$: in x_0 ha lo stesso valore e la stessa derivata di f . Il suo zero si calcola: se $f'(x_0) \neq 0$,

$$f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) = 0 \implies x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

In generale $f'(x_1) \neq 0$: x_1 annulla l'approssimazione, non f . Da x_1 si ripete la stessa costruzione.

2 Il metodo di Newton

Definizione – Metodo di Newton

Dato un punto iniziale x_0 , il **metodo di Newton** calcola, per $k = 0, 1, 2, \dots$ e finché $f'(x_k) \neq 0$,

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

Osservazione – Il metodo è una successione

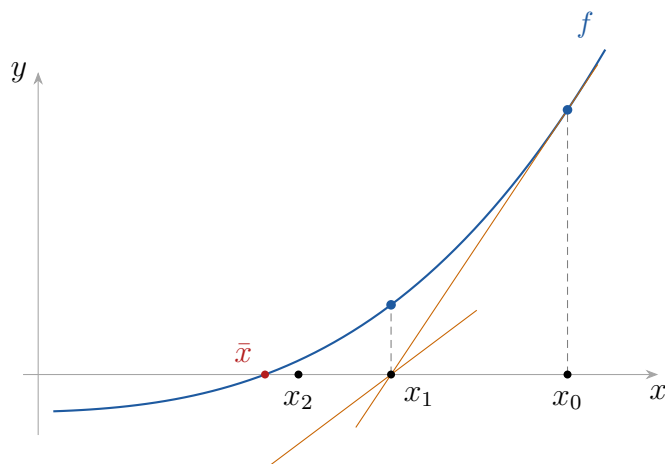
Il metodo di Newton genera una successione $\{x_k\}$ in $\mathbb{R}$ (Capitolo 5). Si vuole che converga a uno zero:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \bar{x} \quad \text{con } f(\bar{x}) = 0.$$

Studiare il metodo vuol dire studiare questa successione.

L'idea del metodo è comune agli algoritmi di ottimizzazione: si risolve il problema nel caso lineare o quadratico (Capitolo 6), si adatta la soluzione al caso generale, e poi si dimostra che la successione prodotta ha buone proprietà di convergenza.

Geometricamente, x_{k+1} è il punto in cui la tangente al grafico di f in $(x_k, f(x_k))$ taglia l'asse x .



Due passi del metodo: la tangente in x_0 dà x_1 , quella in x_1 dà x_2 , più vicino allo zero $\bar{x}$.

Esempio – Lo zero di $x^2 - 2$

Con $f(x) = x^2 - 2$, $f'(x) = 2x$ e $x_0 = 1$:

k	x_k	$f(x_k)$	$x_{k+1} = x_k - f(x_k)/(2x_k)$
0	1	-1	1,5
1	1,5	0,25	1,41667
2	1,41667	0,00694	1,414216

Lo zero positivo è $\bar{x} = \sqrt{2} = 1,4142136 \dots$: dopo tre passi l'errore è circa $2 \cdot 10^{-6}$.

3 Convergenza

Teorema – Convergenza locale del metodo di Newton

Siano

- f derivabile, con f' continua, su un intervallo aperto che contiene $\bar{x}$;
- $f(\bar{x}) = 0$ e $f'(\bar{x}) \neq 0$.

Allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che, se $|x_0 - \bar{x}| < \varepsilon$, tutti i punti x_k del metodo di Newton sono definiti, stanno in $(\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon)$ e

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \bar{x}.$$

Le due ipotesi hanno un ruolo diverso:

1. $f'(\bar{x}) \neq 0$ riguarda la funzione: la derivata sta al denominatore. Con f' continua, la derivata resta diversa da zero in tutto un intorno di $\bar{x}$.
2. x_0 vicino a $\bar{x}$ riguarda il punto iniziale. Il teorema garantisce che ε esiste, ma non dice quanto vale: in pratica non si sa se x_0 è abbastanza vicino.

Lontano da $\bar{x}$ il metodo può incontrare un punto con $f'(x_k) = 0$, dove la tangente è orizzontale e x_{k+1} non è definito.

Definizione – Convergenza locale e globale

Un metodo è **localmente convergente** se converge a una soluzione partendo da punti iniziali abbastanza vicini a essa; è **globalmente convergente** se converge da qualsiasi punto iniziale.

Il teorema dice che il metodo di Newton è localmente convergente. Esistono modifiche che lo rendono globalmente convergente.

Definizione – Convergenza asintotica e finita

Un risultato di **convergenza asintotica** assicura che $x_k \rightarrow \bar{x}$ per $k \rightarrow \infty$. Un risultato di **convergenza finita** assicura che il metodo raggiunge la soluzione in un numero finito di iterazioni.

Il teorema di convergenza locale è asintotico. La convergenza finita è più forte, ma si ottiene solo per poche classi di problemi.

Definizione – Strategia multi-start

La **strategia multi-start** esegue il metodo da più punti iniziali x_0 , generati in modo casuale, sperando che almeno uno sia abbastanza vicino a una soluzione da convergere.

Con una variabile si può guardare il grafico di f e scegliere x_0 vicino alla zona in cui il grafico taglia l'asse. Con più variabili il grafico non si vede, e x_0 si fa variare a caso nello spazio.

Riepilogo

- **Approssimazione lineare:** $\hat{f}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, la tangente.
- **Newton:** $x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k)$, lo zero della tangente in x_k .
- **Successione:** il metodo genera $\{x_k\}$; si vuole $x_k \rightarrow \bar{x}$ con $f(\bar{x}) = 0$.
- **Convergenza locale:** f' continua, $f'(\bar{x}) \neq 0$ e x_0 abbastanza vicino a $\bar{x}$.
- **Locale e globale:** da punti vicini alla soluzione o da qualsiasi punto.
- **Asintotica e finita:** $x_k \rightarrow \bar{x}$, o soluzione in un numero finito di passi.
- **Multi-start:** più punti iniziali casuali.