

Appunti di Programmazione Matematica

Canale 1 · Prof. Marco Sciandrone

Capitolo 9: Limiti lungo le successioni e continuità

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dalle lezioni in aula e dal materiale del corso

Argomenti: Teorema ponte · Non esistenza di un limite · Funzioni continue

Indice

1	Il teorema ponte	1
2	Funzioni continue	3
3	Esercizi	3
4	Soluzioni	5

1 Il teorema ponte

Teorema – Teorema ponte

Siano $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ un punto di accumulazione di D e $L \in \mathbb{R}^*$. Allora $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ se e solo se, per ogni successione $\{x_k\}$ tale che

- $x_k \in D \setminus \{x_0\}$ per ogni k ,
- $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0$,

risulta

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = L.$$

Il teorema lega il limite di una funzione (Capitolo 4) ai limiti di successioni (Capitolo 5). Le successioni stanno in D e evitano x_0 , come i punti x nella definizione di limite. L può essere un numero, $+\infty$ o $-\infty$.

La condizione vale *per ogni* successione, e le successioni che tendono a x_0 sono infinite: non si possono controllare tutte. Il teorema si usa quindi in due modi.

Proposizione – Non esistenza del limite

Siano $\{a_k\}$ e $\{b_k\}$ due successioni in $D \setminus \{x_0\}$ che tendono a x_0 . Se

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(a_k) = L_1, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f(b_k) = L_2, \quad L_1 \neq L_2,$$

allora $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ non esiste.

Dimostrazione

1. Se il limite esistesse e valesse L , per il teorema ponte sarebbe $f(a_k) \rightarrow L$ e $f(b_k) \rightarrow L$.
2. Per l'unicità del limite $L_1 = L = L_2$, contro l'ipotesi.

□

Osservazione – Molte successioni non bastano

Se cento successioni danno lo stesso valore L , si può congetturare che il limite sia L , ma non è dimostrato. Per dimostrarlo si torna alla definizione di limite (Capitolo 4), con ε e δ .

Esempio – Un limite che non esiste in $\mathbb{R}^2$

Sia

$$f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \neq 0\}.$$

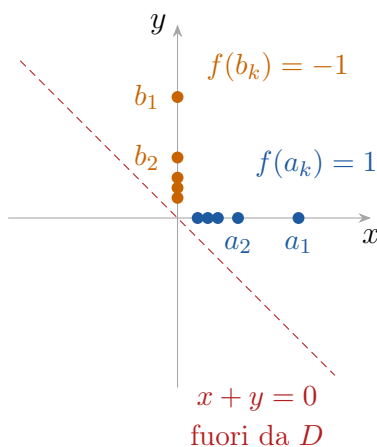
1. **Il dominio.** D è il piano senza la retta $x + y = 0$. È aperto: è l'unione dei due aperti $\{x + y > 0\}$ e $\{x + y < 0\}$ (Capitolo 3).
2. **Accumulazione.** I punti di D sono interni, quindi di accumulazione; ogni intorno di un punto della retta contiene punti di D . Tutti i punti di $\mathbb{R}^2$, anche $(0, 0)$, sono di accumulazione per D : il limite in $(0, 0)$ si può studiare.
3. **Due successioni.** Per $k \geq 1$ siano

$$a_k = \begin{pmatrix} 1/k \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/k \end{pmatrix}.$$

Stanno in $D \setminus \{(0, 0)\}$, perché la somma delle componenti è $1/k \neq 0$, e tendono a $(0, 0)$.

4. **I valori.** $f(a_k) = \frac{1/k}{1/k} = 1$ e $f(b_k) = \frac{-1/k}{1/k} = -1$ per ogni k : i limiti sono 1 e -1 .

Per la proposizione precedente $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ non esiste.



Le due successioni tendono all'origine lungo gli assi: lungo l'asse x la funzione vale sempre 1, lungo l'asse y sempre -1 .

2 Funzioni continue

Definizione – Funzione continua

Siano $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in D$. La funzione f è **continua** in x_0 se

- x_0 è un punto isolato di D , oppure
- x_0 è un punto di accumulazione di D e

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

f è continua su un insieme $E \subseteq D$ se è continua in ogni punto di E .

Servono due cose: $x_0 \in D$, perché $f(x_0)$ esista, e x_0 di accumulazione, perché si possa studiare il limite. In un punto isolato il limite non si studia, e la continuità vale per convenzione.

La definizione è quella di Analisi I, con $n = 1$. In $\mathbb{R}^n$ non cambia nulla: il limite si scrive con la norma al posto del valore assoluto (Capitolo 4).

Riepilogo

- **Teorema ponte:** $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ se e solo se $f(x_k) \rightarrow L$ per ogni $\{x_k\} \subseteq D \setminus \{x_0\}$ con $x_k \rightarrow x_0$.
- **Non esistenza:** due successioni verso x_0 con limiti diversi dei valori.
- **Esistenza:** poche successioni non bastano; serve la definizione di limite.
- **Continuità in un punto:** $x_0 \in D$ isolato, oppure di accumulazione con $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.
- **Continuità su un insieme:** in ogni suo punto.

3 Esercizi

Esercizio 1 – Primo esonero 2025-26, Canale M-Z, Prof. Giampaolo Liuzzi, compito A, esercizio 3, adattato

Data la funzione di due variabili

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 y - 3 & \text{se } y \geq x - 3, \\ y + 2x - x^2 & \text{se } y < x - 3, \end{cases}$$

dimostrare che non esiste $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,-1)} f(x, y)$.

Soluzione a pagina 5 →

Esercizio 2 – Appello di Analisi Matematica II del 02/02/2024, Canale M-Z, Prof. Giampaolo Liuzzi, test vero/falso B turno II, domanda 6

Siano $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ limitata inferiormente e $\{x_k\}$ una successione di punti. Dire se ciascuna affermazione è vera o falsa.

- (a) Se $f(x_{k+1}) < f(x_k)$, allora $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = \bar{f} > -\infty$.
- (b) Se $f(x_{k+1}) \leq f(x_k)$, allora $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = \bar{f} > -\infty$.
- (c) Se $f(x_{k+1}) \geq f(x_k)$, allora $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = \bar{f} < +\infty$.
- (d) Se $\{x_k\}$ è limitata e f è continua, allora esiste $K \subseteq \{0, 1, \dots\}$ tale che

$$\lim_{\substack{k \in K \\ k \rightarrow \infty}} x_k = \bar{x} \quad \text{e} \quad \lim_{\substack{k \in K \\ k \rightarrow \infty}} f(x_k) = f(\bar{x}).$$

Soluzione a pagina 5 →

4 Soluzioni

Soluzione dell'Esercizio 1 – Primo esonero 2025-26, Canale M-Z, Prof. Giampaolo Liuzzi, compito A, esercizio 3, adattato

f è definita su tutto $\mathbb{R}^2$, quindi $(2, -1)$ è di accumulazione per il dominio. Il punto sta sulla retta $y = x - 3$ che separa le due espressioni, perché $-1 = 2 - 3$. Ci si avvicina da sopra e da sotto la retta, con $x = 2$; per $k \geq 1$ siano

$$a_k = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 + 1/k \end{pmatrix}, \quad b_k = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 - 1/k \end{pmatrix}.$$

1. Entrambe sono diverse da $(2, -1)$ e vi tendono: $\|a_k - (2, -1)\|_2 = \|b_k - (2, -1)\|_2 = 1/k \rightarrow 0$.
2. In a_k si ha $y = -1 + 1/k \geq -1 = x - 3$, quindi vale la prima espressione:

$$f(a_k) = 4 \left(-1 + \frac{1}{k} \right) - 3 = -7 + \frac{4}{k} \rightarrow -7.$$

3. In b_k si ha $y = -1 - 1/k < -1 = x - 3$, quindi vale la seconda:

$$f(b_k) = -1 - \frac{1}{k} + 4 - 4 = -1 - \frac{1}{k} \rightarrow -1.$$

I limiti -7 e -1 sono diversi: per la proposizione “Non esistenza del limite” il limite di f in $(2, -1)$ non esiste.

[← Torna all'Esercizio 1, pagina 3](#)

Soluzione dell'Esercizio 2 – Appello di Analisi Matematica II del 02/02/2024, Canale M-Z, Prof. Giampaolo Liuzzi, test vero/falso B turno II, domanda 6

(a) Vera. $\{f(x_k)\}$ è una successione reale decrescente, quindi ha limite $\bar{f} = \inf_k f(x_k)$ in $\mathbb{R}^*$. Se $f(x) \geq m$ per ogni x , allora $f(x_k) \geq m$ per ogni k , e $\bar{f} \geq m > -\infty$.

(b) Vera, con lo stesso ragionamento: anche con $\leq$ la successione dei valori è decrescente.

(c) Falsa. Sia e_1 il vettore di $\mathbb{R}^n$ con prima componente 1 e le altre nulle. Con $f(x) = x_1^2 \geq 0$, limitata inferiormente, e $x_k = k e_1$ si ha $f(x_k) = k^2$: $f(x_{k+1}) \geq f(x_k)$ per ogni k , ma $f(x_k) \rightarrow +\infty$.

(d) Vera.

1. Per Bolzano-Weierstrass esistono K infinito e $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ con $x_k \rightarrow \bar{x}$ per $k \in K$.
2. $\bar{x}$ è interno a $\mathbb{R}^n$, quindi di accumulazione, e f è continua in $\bar{x}$: dato $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $|f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon$ se $0 < \|x - \bar{x}\| < \delta$, e anche se $x = \bar{x}$.

3. Da un indice k_δ in poi, per $k \in K$ si ha $\|x_k - \bar{x}\| < \delta$, quindi $|f(x_k) - f(\bar{x})| < \varepsilon$:
 $f(x_k) \rightarrow f(\bar{x})$ lungo K .

[← Torna all'Esercizio 2, pagina 4](#)