Teoria del primo esonero di Programmazione Matematica

Canale 1 · Prof. Marco Sciandrone

Il primo esonero è l'11 novembre 2026 e il suo programma copre i capitoli 1–5 del libro di G. Liuzzi e M. Sciandrone, *Complementi di Matematica*. Qui trovi tutti i teoremi, le proposizioni, i lemmi, i corollari e le proprietà che ne fanno parte, nell'ordine del libro e con il numero che hanno lì.

Ogni enunciato si chiude con un'etichetta. **Dimostrazione da fare** vuol dire che la dimostrazione va saputa e segue subito, **Solo enunciato** che basta l'enunciato. La dimostrazione va saputa se è stata spiegata nel corso e il programma non la salta, oppure se il programma la segna esplicitamente «con dimostrazione». Definizioni, esempi ed esercizi non ci sono, perché stanno nel libro e negli appunti. In fondo, il riepilogo elenca le dimostrazioni da fare con la loro pagina.

Programma

Di ogni capitolo il programma toglie solo le parti segnate qui sotto come «fuori». Tutto il resto è in programma.

1. **Lo spazio $\mathbb{R}^n$**: numeri reali, $\mathbb{R}^n$ e le sue operazioni, prodotto scalare, norme e distanze, intorni, insiemi aperti e chiusi, punti di accumulazione e isolati.
   Fuori: prodotto di Hadamard, prodotto diadico e cenni sullo spazio topologico (paragrafi 1.5.1, 1.5.3 e 1.8), Lemma 1.15, Teorema 1.4, Proposizione 1.27 e Proprietà 1.33. Fra le dimostrazioni da fare il programma mette la Proposizione 1.36 e la 1.16 (Cauchy-Schwarz), ma la 1.16 compare anche fra quelle da saltare, quindi qui è solo enunciata.

2. **Funzioni in $\mathbb{R}^n$**: funzioni scalari e vettoriali, limiti, successioni e sottosuccessioni, teoremi di Bolzano-Weierstrass, continuità e calcolo dei limiti, più un'appendice su funzioni lineari, forme e funzioni quadratiche.
   Fuori: proprietà dei limiti (paragrafo 2.5), Esempi 2.18 e 2.23, Proposizioni 2.21 e 2.22, Teorema 2.23 e tutte le dimostrazioni dell'appendice.

3. **Differenziazione di funzioni di più variabili**: derivate direzionali e parziali, gradiente, differenziabilità, matrice jacobiana, derivate seconde e matrice hessiana, teorema della media e formula di Taylor, formule notevoli.
   Fuori: la dimostrazione della Proposizione 3.1, le regole di differenziazione (paragrafo 3.3), la derivazione di funzioni composte (3.5), il teorema delle funzioni implicite (3.9), il paragrafo 3.10 e, nel paragrafo 3.7, tutto dal Teorema 3.4 in poi.

4. **Convessità di insiemi e funzioni**: sottospazi, iperpiani, semispazi e poliedri, insiemi convessi, funzioni convesse e concave, convessità di funzioni differenziabili, insiemi convessi definiti da equazioni e disequazioni, matrici definite e semidefinite.
   Fuori: le dimostrazioni delle Proposizioni 4.2 e 4.19.

5. **Massimi e minimi di funzioni di più variabili**, fino al paragrafo 5.6 escluso: minimi locali e globali, caso convesso, esistenza, direzioni di discesa, condizioni di ottimalità senza vincoli, massimi e punti di sella.
   Fuori: le dimostrazioni delle Proposizioni 5.5, 5.15 e 5.16.

1 Lo spazio $\mathbb{R}^n$

Estremo superiore ed estremo inferiore

Teorema 1.1 – Esistenza degli estremi superiore e inferiore

Sia A un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$. Allora esiste l'estremo superiore (inferiore) di A se e solo se A è limitato superiormente (inferiormente).

Solo enunciato

Teorema 1.2 – Caratterizzazione dell'estremo superiore

Il valore $\Omega \in \mathbb{R}$ è l'estremo superiore di un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ se e solo se

(i) Ω è un maggiorante di A;

(ii) comunque preso $\varepsilon > 0$, $\Omega - \varepsilon$ non è più un maggiorante, cioè esiste $x \in A$ tale che $\Omega - \varepsilon < x$.

Solo enunciato

Teorema 1.3 – Caratterizzazione dell'estremo inferiore

Il valore $\lambda \in \mathbb{R}$ è l'estremo inferiore di un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ se e solo se

(i) λ è un minorante di A;

(ii) comunque preso $\varepsilon > 0$, $\lambda + \varepsilon$ non è più un minorante, cioè esiste $x \in A$ tale che $x < \lambda + \varepsilon$.

Solo enunciato

Norme e distanze in $\mathbb{R}^n$

Proposizione 1.16 – Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

Siano $x, y \in \mathbb{R}^n$ e sia $\langle x, y \rangle = x^\mathsf{T} y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ il prodotto scalare. Allora

$$|x^\mathsf{T} y| \leq \|x\|_2 \, \|y\|_2.$$

Inoltre vale l'uguaglianza se e solo se uno dei due vettori è multiplo dell'altro.

Solo enunciato

Intorni, insiemi aperti, insiemi chiusi

Proprietà 1.30 – Unione e intersezione di insiemi aperti

1. L'unione di un numero finito o infinito di insiemi aperti è ancora un insieme aperto.
2. L'intersezione di un numero finito di insiemi aperti è ancora un insieme aperto.

Solo enunciato

Proprietà 1.31 – Intersezione e unione di insiemi chiusi

1. L'intersezione di un numero finito o infinito di insiemi chiusi è ancora un insieme chiuso.
2. L'unione di un numero finito di insiemi chiusi è ancora un insieme chiuso.

Solo enunciato

Punti di accumulazione e isolati

Proposizione 1.36 – Caratterizzazione degli insiemi chiusi

Dato un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$, le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(1) E è chiuso;
(2) $\partial E \subseteq E$;
(3) E contiene i suoi punti di accumulazione, cioè $\mathscr{D}(E) \subseteq E$.

Dimostrazione da fare

Dimostrazione

Si dimostra il cerchio (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1).

(1) **(1) $\Rightarrow$ (2).** Si fa vedere che un punto fuori da E non è di frontiera. Se $\bar{x} \notin E$, allora $\bar{x} \in \text{co}(E)$, che è aperto perché E è chiuso: esiste $\mathcal{B}_\rho(\bar{x}) \subseteq \text{co}(E)$. Questo intorno sferico non contiene punti di E, quindi $\bar{x} \notin \partial E$.

(2) **(2) $\Rightarrow$ (3).** Per assurdo, sia $\bar{x}$ un punto di accumulazione di E con $\bar{x} \notin E$. Ogni intorno sferico di $\bar{x}$ contiene un punto di E, e contiene anche $\bar{x}$, che non sta in E, quindi $\bar{x} \in \partial E$. Allora $\bar{x} \in \partial E \subseteq E$, contro $\bar{x} \notin E$.

(3) **(3) $\Rightarrow$ (1).** Si fa vedere che $\text{co}(E)$ è aperto. Sia $\bar{x} \in \text{co}(E)$. Poiché $\mathscr{D}(E) \subseteq E$, $\bar{x}$ non è di accumulazione per E: esiste $\mathcal{B}_\rho(\bar{x})$ senza punti di E diversi da $\bar{x}$, e poiché $\bar{x} \notin E$ non ne contiene nessuno. Quindi $\mathcal{B}_\rho(\bar{x}) \subseteq \text{co}(E)$, e $\bar{x}$ è interno a $\text{co}(E)$.

□

2 Funzioni in $\mathbb{R}^n$

Limiti di funzioni vettoriali

Proposizione 2.10 – Limite di una funzione vettoriale e limiti delle componenti

Siano $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x_0 \in \mathbb{R}^n_* = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ un punto di accumulazione per D, $\ell \in \mathbb{R}^m$, e

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix}, \qquad \ell = \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \vdots \\ \ell_m \end{pmatrix}.$$

Allora

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff \lim_{x \to x_0} f_i(x) = \ell_i \quad \text{per ogni } i = 1, \dots, m.$$

Solo enunciato

Successioni in $\mathbb{R}^n$

Proposizione 2.14 – Successioni limitate e componenti

Una successione $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ è limitata se e solo se sono limitate le successioni $\{(x_k)_i\}$ definite dalle singole componenti, per $i = 1, \dots, n$.

Solo enunciato

Limiti di successioni in $\mathbb{R}^n$

Teorema 2.24 – Successioni limitate in $\mathbb{R}$

Una successione $\{x_k\}$ in $\mathbb{R}$ limitata ammette almeno una sottosuccessione convergente, cioè ammette almeno un punto limite.

Solo enunciato

Teorema 2.25 – Bolzano-Weierstrass per successioni

Sia $\{x_k\}$ una successione a valori in $\mathbb{R}^n$ limitata. Allora essa ammette almeno una sottosuccessione convergente: esistono un insieme infinito di indici $K \subseteq \mathbb{N}$ e $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tali che

$$\lim_{\substack{k \in K \\ k \to \infty}} x_k = \bar{x}.$$

Dimostrazione da fare

Dimostrazione

Per la Proposizione 2.14 le successioni delle componenti $\{(x_k)_1\}, \ldots, \{(x_k)_n\}$ sono limitate.

(1) **Prima componente.** $\{(x_k)_1\}$ è una successione reale limitata: per il Teorema 2.24 esistono un insieme infinito $K_1 \subseteq \mathbb{N}$ e $\bar{x}_1 \in \mathbb{R}$ con $(x_k)_1 \to \bar{x}_1$ per $k \in K_1$.

(2) **Seconda componente.** Lungo K_1 la successione $\{(x_k)_2\}$ è ancora limitata: per il Teorema 2.24 esistono un insieme infinito $K_2 \subseteq K_1$ e $\bar{x}_2$ con $(x_k)_2 \to \bar{x}_2$ per $k \in K_2$. Lungo K_2 anche la prima componente tende a $\bar{x}_1$, perché è una sottosuccessione di quella su K_1.

(3) **Le altre componenti.** Si ripete fino alla componente n e si ottiene $K_n \subseteq K_{n-1} \subseteq \cdots \subseteq K_1$ tale che, per $k \in K_n$, ogni componente $(x_k)_i$ tende a $\bar{x}_i$.

(4) **Conclusione.** Sia $\bar{x} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)^\mathsf{T}$. Per ogni $y \in \mathbb{R}^n$ si ha $\|y\| \leq |y_1| + \cdots + |y_n|$. Dato $\varepsilon > 0$, per ogni i vale $|(x_k)_i - \bar{x}_i| < \varepsilon/n$ per $k \in K_n$ abbastanza grande. Con $y = x_k - \bar{x}$ ne segue $\|x_k - \bar{x}\| < \varepsilon$. Quindi $x_k \to \bar{x}$ per $k \in K_n$.

□

Corollario 2.26 – Successioni in un compatto

Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme compatto, cioè chiuso e limitato, e sia $\{x_k\}$ una successione tale che $x_k \in C$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Allora $\{x_k\}$ ammette almeno una sottosuccessione convergente a un punto $\bar{x} \in C$.

Solo enunciato

Teorema 2.27 – Bolzano-Weierstrass per insiemi (anche Teorema 1.5)

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme limitato con infiniti punti. Allora esiste almeno un punto di accumulazione di E.

Dimostrazione da fare

Dimostrazione

(1) E ha infiniti punti, quindi esiste una successione $\{x_k\}$ di punti di E distinti fra loro.

(2) E è limitato, quindi anche $\{x_k\}$ lo è. Per il Teorema 2.25 esistono K e $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ con $x_k \to \bar{x}$ per $k \in K$.

(3) Dato $\rho > 0$, per la definizione di limite esiste k_ρ tale che $x_k \in \mathcal{B}_\rho(\bar{x})$ per ogni $k \in K$ con $k \geq k_\rho$. Questi termini sono infiniti e distinti, quindi al più uno coincide con $\bar{x}$. Allora l'intorno sferico contiene un punto di E diverso da $\bar{x}$, e $\bar{x}$ è di accumulazione per E.

□

Teorema 2.28 – Teorema ponte

Siano $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$ e x_0 un punto di accumulazione per D. Allora

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

se e solo se, per ogni successione $\{x_k\}$ a valori in $D \setminus \{x_0\}$ e convergente a x_0, risulta

$$\lim_{k \to \infty} f(x_k) = \ell.$$

Solo enunciato

Continuità

Lemma 2.31 – Le funzioni coordinate sono continue

Le funzioni "elementari" $\varphi_i : x \mapsto x_i$, con $i = 1, 2, \ldots, n$, sono continue per ogni $x \in \mathbb{R}^n$.

Dimostrazione da fare

Dimostrazione

Ogni punto $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ è di accumulazione per $\mathbb{R}^n$, quindi per ogni i e ogni $\bar{x}$ si deve mostrare che

$$\lim_{x \to \bar{x}} \varphi_i(x) = \varphi_i(\bar{x}) = \bar{x}_i,$$

cioè che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che

$$|x_i - \bar{x}_i| < \varepsilon \quad \forall x : \ 0 < \|x - \bar{x}\| < \delta_\varepsilon.$$

Per ogni $j = 1, \ldots, n$ vale $|x_j - \bar{x}_j| \leq \sqrt{\sum_{l=1}^{n} (x_l - \bar{x}_l)^2} = \|x - \bar{x}\|$, quindi $\|x - \bar{x}\| < \delta$ implica $|x_j - \bar{x}_j| < \delta$. Basta quindi scegliere $\delta_\varepsilon = \varepsilon$. □

Lemma 2.33 – Lipschitz implica continua

Sia $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Lipschitz continua in D con costante L, cioè

$$|f(x) - f(y)| \leq L\|x - y\| \qquad \forall x, y \in D.$$

Allora f è continua in D, cioè è continua in ogni $x_0 \in D$.

Dimostrazione da fare

Dimostrazione

Sia $x_0 \in D$. Se x_0 è un punto isolato di D, f è continua in x_0 per definizione. Altrimenti x_0 è di accumulazione per D e si deve mostrare che $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Si può supporre $L > 0$: una funzione Lipschitz continua con costante L lo è anche con ogni costante maggiore. Per ogni coppia $x, x_0 \in D$

$$|f(x) - f(x_0)| \leq L\|x - x_0\|.$$

Quindi, dato $\varepsilon > 0$, se $x \in D$ e $\|x - x_0\| < \varepsilon / L$ risulta

$$|f(x) - f(x_0)| \leq L\|x - x_0\| < L \cdot \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon.$$

Questa è la definizione di $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. □

Teorema 2.35 – Heine-Cantor

Sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme compatto, cioè chiuso e limitato, e sia $f : D \to \mathbb{R}$ una funzione continua su D. Allora f è anche uniformemente continua su D.

Solo enunciato

Calcolo dei limiti di funzioni

Teorema 2.37 – Limite mediante restrizioni

Siano $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n_* = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ un punto di accumulazione per D. Allora

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}^*$$

se e solo se, per ogni sottoinsieme $A \subseteq D$ che ha x_0 come punto di accumulazione, risulta

$$\lim_{x \to x_0} f|_A(x) = \ell \in \mathbb{R}^*,$$

dove $f|_A : A \to \mathbb{R}$ è la restrizione di f ad A, cioè $f|_A(x) = f(x)$ per ogni $x \in A$.

Solo enunciato

Appendice: funzioni lineari e funzioni quadratiche

Proposizione 2.39 – Funzioni lineari

Una funzione $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è un'applicazione lineare se e solo se

$$f(x) = Ax$$

dove A è una matrice $m \times n$.

Solo enunciato

Proposizione 2.40 – Rappresentazione simmetrica di una forma quadratica

Una forma quadratica $q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, x_i x_j = x^{\mathsf{T}} A x$ può essere rappresentata mediante una matrice S simmetrica, cioè $s_{ij} = s_{ji}$ per $i, j = 1, \ldots, n$ e $q(x) = x^{\mathsf{T}} S x$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$.

Solo enunciato

3 Differenziazione di funzioni di più variabili

Derivata per funzioni di una variabile reale

Proposizione 3.1 – Derivabile e differenziabile

Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è derivabile in un punto x_0 se e solo se è differenziabile in x_0.

Solo enunciato

Derivate del primo ordine di una funzione di più variabili

Proposizione 3.5 – Derivata parziale e derivate direzionali

Siano $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^n$, e sia e_j il versore del j-esimo asse coordinato. Esiste in x la derivata parziale $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ se e solo se

(i) esiste la derivata direzionale $Df(x, e_j)$ di f in x lungo e_j;
(ii) esiste la derivata direzionale $Df(x, -e_j)$ di f in x lungo $-e_j$;
(iii) si ha $Df(x, e_j) = -Df(x, -e_j)$.

In tal caso $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x) = Df(x, e_j)$.

Dimostrazione da fare

Dimostrazione

Per definizione

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t\, e_j) - f(x)}{t}, \qquad Df(x, d) = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x + t\, d) - f(x)}{t}.$$

La derivata parziale esiste se e solo se i limiti destro e sinistro del rapporto $\frac{f(x+t\,e_j)-f(x)}{t}$ esistono finiti e sono uguali.

1. **Limite destro.** Per definizione è $Df(x, e_j)$.
2. **Limite sinistro.** Con $t = -h$, $t \to 0^-$ equivale a $h \to 0^+$ e
$$\lim_{t \to 0^-} \frac{f(x + t\, e_j) - f(x)}{t} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x + h(-e_j)) - f(x)}{-h} = -Df(x, -e_j),$$
e il primo limite esiste finito se e solo se esiste $Df(x, -e_j)$.
3. ($\Rightarrow$) Se la derivata parziale esiste, i due limiti esistono e sono uguali: valgono (i)-(iii) e $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = Df(x, e_j)$.
4. ($\Leftarrow$) Se valgono (i)-(iii), per i passi 1 e 2 i limiti destro e sinistro esistono e valgono entrambi $Df(x, e_j) = -Df(x, -e_j)$, quindi la derivata parziale esiste.

□

Proposizione 3.7 – Differenziabile implica continua

Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile in un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Allora f è continua in x_0.

Dimostrazione da fare

Dimostrazione

1. Per la differenziabilità, con il gradiente $\nabla f(x_0)$ come vettore della definizione,
$$f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0)^\mathsf{T}(x - x_0) + o(\|x - x_0\|) \qquad \text{per } x \to x_0.$$
2. Per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz (Proposizione 1.16) $|\nabla f(x_0)^\mathsf{T}(x - x_0)| \leq \|\nabla f(x_0)\| \, \|x - x_0\|$, che tende a 0 per $x \to x_0$, e anche il resto $o(\|x - x_0\|)$ tende a 0.
3. Quindi $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

□

Proposizione 3.8 – Condizione necessaria e condizione sufficiente di differenziabilità

Siano $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^n$. Si ha:

(i) se f è differenziabile in x, allora f è continua in x ed esiste $\nabla f(x)$;

(ii) se ∇f esiste in un intorno di x ed è continuo in x, allora f è differenziabile in x.

Solo enunciato

Proposizione – Derivata direzionale di una funzione differenziabile

Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è differenziabile in x, per ogni $d \in \mathbb{R}^n$ esiste la derivata direzionale di f in x lungo d e

$$Df(x, d) = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x + t\,d) - f(x)}{t} = \nabla f(x)^\mathsf{T} d.$$

Dimostrazione da fare

Dimostrazione

Per $d = \mathbf{0}$ entrambi i membri valgono 0. Sia $d \neq \mathbf{0}$ e $t > 0$. Il vettore che compare nella definizione di differenziabilità è il gradiente $\nabla f(x)$.

1. Con l'incremento $t\,d$, per la differenziabilità $f(x + t\,d) = f(x) + t\,\nabla f(x)^\mathsf{T} d + r(t\,d)$, con $r(t\,d)/\|t\,d\| \to 0$ per $t \to 0^+$.
2. Poiché $\|t\,d\| = t\,\|d\|$, il rapporto è
$$\frac{f(x + t\,d) - f(x)}{t} = \nabla f(x)^\mathsf{T} d + \|d\|\,\frac{r(t\,d)}{\|t\,d\|}.$$
3. Il secondo termine tende a 0 per $t \to 0^+$, quindi il limite esiste ed è $\nabla f(x)^\mathsf{T} d$.

□

Corollario 3.11 – Funzioni di classe C^1

Sia $f : D \to \mathbb{R}$, con D sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$. Se f è di classe C^1 su D, cioè $f \in C^1(D)$, allora f è differenziabile su D, ovvero è differenziabile per ogni $x \in D$.

Solo enunciato

Differenziazione di un vettore di funzioni

Proposizione 3.20 – Differenziabilità di una funzione vettoriale e matrice jacobiana

Siano $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $x \in \mathbb{R}^n$. Si ricorda che g è differenziabile in x se esiste una matrice $G(x) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tale che

$$\lim_{\|d\| \to 0} \frac{\|g(x+d) - g(x) - G(x)\, d\|}{\|d\|} = 0,$$

e che $G(x)$ è la derivata di Fréchet di g in x. Si ha:

(i) se g è differenziabile in x, allora g è continua in x, esiste la matrice jacobiana $J(x)$ e $J(x)$ coincide con la derivata di Fréchet di g in x;

(ii) se esiste la matrice jacobiana $J(x)$ di g in x e J è continua rispetto a x, allora g è differenziabile in x e la derivata di Fréchet di g in x coincide con $J(x)$.

Solo enunciato

Derivate del secondo ordine di una funzione reale

Proposizione 3.25 – Funzioni due volte differenziabili e matrice hessiana

Siano $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^n$. Si ricorda che f è due volte differenziabile in x se f è differenziabile in x ed esiste una matrice $H(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tale che

$$f(x+d) = f(x) + \nabla f(x)^{\mathsf{T}} d + \frac{1}{2}\, d^{\mathsf{T}} H(x)\, d + \beta(x,d) \qquad \text{con} \qquad \lim_{\|d\| \to 0} \frac{\beta(x,d)}{\|d\|^2} = 0,$$

e che $H(x)$ è la derivata seconda di Fréchet di f in x. Si ha:

(i) se f è due volte differenziabile in x, allora il gradiente ∇f esiste ed è continuo in x, la matrice hessiana $\nabla^2 f(x)$ esiste ed è simmetrica e coincide con la derivata seconda di Fréchet di f in x;

(ii) se esiste la matrice hessiana $\nabla^2 f(x)$ in x e $\nabla^2 f$ è continua rispetto a x, allora f è due volte differenziabile in x, $\nabla^2 f(x)$ è necessariamente simmetrica e la derivata seconda di Fréchet di f in x coincide con $\nabla^2 f(x)$.

Solo enunciato

Teorema della media e formula di Taylor

Teorema 3.1 – Teorema della media

Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile in $\mathbb{R}^n$. Fissato $x \in \mathbb{R}^n$, per ogni $d \in \mathbb{R}^n$ si può scrivere

$$f(x+d) = f(x) + \nabla f(z)^{\mathsf{T}} d,$$

in cui $z \in \mathbb{R}^n$ è un punto opportuno (dipendente da x e d) tale che $z = x + \zeta\, d$, con $\zeta \in (0,1)$. In particolare, per $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$f(y) = f(x) + \nabla f(z)^{\mathsf{T}} (y - x), \qquad z = x + \zeta\,(y-x), \quad \zeta \in (0,1).$$

Solo enunciato

Teorema 3.2 – Teorema della media in forma integrale

Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile in $\mathbb{R}^n$. Fissato $x \in \mathbb{R}^n$, per ogni $d \in \mathbb{R}^n$ si può scrivere

$$f(x+d) = f(x) + \int_0^1 \nabla f(x + t\,d)^{\mathsf{T}} d \,\mathrm{d}t.$$

Analogamente, per $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$f(y) = f(x) + \int_0^1 \nabla f\big(x + t\,(y-x)\big)^{\mathsf{T}} (y-x)\,\mathrm{d}t.$$

Solo enunciato

Teorema 3.3 – Teorema di Taylor

Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione due volte differenziabile in $\mathbb{R}^n$. Fissato $x \in \mathbb{R}^n$, per ogni $d \in \mathbb{R}^n$ si può scrivere

$$f(x+d) = f(x) + \nabla f(x)^{\mathsf{T}} d + \frac{1}{2}\, d^{\mathsf{T}} \nabla^2 f(w)\, d,$$

in cui $w \in \mathbb{R}^n$ è un punto opportuno (dipendente da x e d) tale che $w = x + \xi\, d$, con $\xi \in (0,1)$. In particolare, per $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$f(y) = f(x) + \nabla f(x)^{\mathsf{T}} (y-x) + \frac{1}{2}\,(y-x)^{\mathsf{T}} \nabla^2 f(w)\,(y-x), \qquad w = x + \xi\,(y-x), \quad \xi \in (0,1).$$

Solo enunciato

4 Convessità di insiemi e funzioni

Elementi di geometria di $\mathbb{R}^n$

Proposizione 4.2 – Condizione necessaria e sufficiente per sottospazi lineari

Un insieme non vuoto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ è un sottospazio lineare se e solo se

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = \mathbf{0}\},$$

dove A è un'opportuna matrice $m \times n$, con $m \leq n$, e $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^m$ è l'origine di $\mathbb{R}^m$.

Solo enunciato

Proposizione 4.3 – Dimensione di un sottospazio lineare

Sia S un sottospazio lineare, $S = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = \mathbf{0}\}$. La dimensione di S è

$$n - \operatorname{rk} A.$$

Solo enunciato

Insiemi convessi

Proposizione 4.8 – Convessità di un semispazio

Siano $a \in \mathbb{R}^n$ e $\beta \in \mathbb{R}$. Gli insiemi

$$\{x \in \mathbb{R}^n : a^\mathsf{T} x \leq \beta\}, \quad \{x \in \mathbb{R}^n : a^\mathsf{T} x \geq \beta\}, \quad \{x \in \mathbb{R}^n : a^\mathsf{T} x < \beta\}, \quad \{x \in \mathbb{R}^n : a^\mathsf{T} x > \beta\}$$

sono convessi.

Dimostrazione da fare

Dimostrazione

Sia $S = \{x : a^\mathsf{T} x \leq \beta\}$. Siano $x, y \in S$ e $\lambda \in [0,1]$, e sia $z = (1-\lambda)\,x + \lambda\,y$ un punto qualsiasi del segmento $[x, y]$.

1. Per la linearità del prodotto scalare $a^\mathsf{T} z = (1-\lambda)\,a^\mathsf{T} x + \lambda\,a^\mathsf{T} y$.
2. Poiché $1-\lambda \geq 0$, $\lambda \geq 0$, $a^\mathsf{T} x \leq \beta$ e $a^\mathsf{T} y \leq \beta$, si ha $a^\mathsf{T} z \leq (1-\lambda)\,\beta + \lambda\,\beta = \beta$, cioè $z \in S$.

Per $\{x : a^\mathsf{T} x \geq \beta\}$ si invertono le disuguaglianze. Per quelli con disuguaglianza stretta, per esempio $a^\mathsf{T} x < \beta$, si ha $\beta - a^\mathsf{T} z = (1-\lambda)(\beta - a^\mathsf{T} x) + \lambda(\beta - a^\mathsf{T} y) > 0$, perché $1-\lambda$ e λ non sono entrambi nulli e $\beta - a^\mathsf{T} x$, $\beta - a^\mathsf{T} y$ sono positivi. □

Proposizione 4.9 – Intersezione di insiemi convessi

L'intersezione di una famiglia qualsiasi, anche infinita, $\{C_i,\ i \in I\}$ di insiemi convessi è un insieme convesso.

Dimostrazione da fare

Dimostrazione

Sia $C = \bigcap_{i \in I} C_i$.

1. Siano $x, y \in C$ e $\lambda \in [0,1]$. Allora $x, y \in C_i$ per ogni $i \in I$.
2. Ogni C_i è convesso, quindi $z = (1-\lambda)\,x + \lambda\,y \in C_i$ per ogni i.
3. Allora z sta in tutti i C_i, cioè $z \in C$.

□

Proposizione 4.10 – Convessità di un iperpiano

Un iperpiano $H = \{x \in \mathbb{R}^n : a^\mathsf{T} x = \beta\}$, con $a \in \mathbb{R}^n$ e $\beta \in \mathbb{R}$, è un insieme convesso.

Dimostrazione da fare

Dimostrazione

Un iperpiano è l'intersezione di due semispazi,

$$H = \{x : a^\mathsf{T} x \geq \beta\} \cap \{x : a^\mathsf{T} x \leq \beta\}.$$

I due semispazi sono convessi per la Proposizione 4.8, quindi H è convesso per la Proposizione 4.9. □

Proposizione 4.11 – Convessità di un poliedro

Un poliedro in $\mathbb{R}^n$

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i^\mathsf{T} x \leq b_i,\ i = 1, \dots, m_1\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n : a_i^\mathsf{T} x \geq b_i,\ i = m_1 + 1, \dots, m_2\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n : a_i^\mathsf{T} x = b_i,\ i = m_2 + 1, \dots, m_3\}$$

è un insieme convesso.

Solo enunciato

Proposizione 4.12 – Convessità di una sfera

Siano $\|\cdot\|$ una norma qualsiasi di $\mathbb{R}^n$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\rho > 0$. Le sfere aperta e chiusa

$$\mathcal{B}_\rho(\bar{x}) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - \bar{x}\| < \rho\}, \qquad \overline{\mathcal{B}}_\rho(\bar{x}) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - \bar{x}\| \leq \rho\}$$

sono insiemi convessi.

Dimostrazione da fare

Dimostrazione

Siano x, y due punti della sfera e $\lambda \in [0, 1]$.

1. Aggiungendo e togliendo $\lambda\bar{x}$, $(1-\lambda)\,x + \lambda\,y - \bar{x} = (1-\lambda)(x - \bar{x}) + \lambda(y - \bar{x})$.
2. Per la disuguaglianza triangolare e l'omogeneità della norma, con $1 - \lambda \geq 0$ e $\lambda \geq 0$,
$$\|(1-\lambda)\,x + \lambda\,y - \bar{x}\| \leq (1-\lambda)\|x - \bar{x}\| + \lambda\|y - \bar{x}\|.$$
3. Per la sfera chiusa il secondo membro è al più $(1-\lambda)\rho + \lambda\rho = \rho$. Per la sfera aperta $\|x - \bar{x}\| < \rho$ e $\|y - \bar{x}\| < \rho$, e $1 - \lambda$ e λ non sono entrambi nulli, quindi il secondo membro è minore di ρ.

Il punto $(1-\lambda)\,x + \lambda\,y$ sta quindi nella sfera. □

Funzioni convesse e funzioni concave

Proposizione 4.14 – Le norme sono convesse

Una qualsiasi norma $\|\cdot\|$ in $\mathbb{R}^n$ è una funzione convessa su $\mathbb{R}^n$.

Dimostrazione da fare

Dimostrazione

Siano $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in [0,1]$. Per la disuguaglianza triangolare e l'omogeneità della norma

$$\|(1-\lambda)\,x + \lambda\,y\| \leq |1-\lambda|\,\|x\| + |\lambda|\,\|y\| = (1-\lambda)\|x\| + \lambda\|y\|,$$

dove i valori assoluti si tolgono perché $1-\lambda \geq 0$ e $\lambda \geq 0$. È la definizione di convessità per $f(x) = \|x\|$. □

Proposizione 4.16 – Funzioni affini

Una funzione affine $f(x) = c^{\mathsf{T}}x + d$, con $c \in \mathbb{R}^n$ e $d \in \mathbb{R}$, è sia convessa sia concava su $\mathbb{R}^n$.

Dimostrazione da fare

Dimostrazione

Siano $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in [0,1]$. Allora

$$\begin{aligned} f\big((1-\lambda)\,x + \lambda\,y\big) &= (1-\lambda)\,c^{\mathsf{T}}x + \lambda\,c^{\mathsf{T}}y + d \\ &= (1-\lambda)\,c^{\mathsf{T}}x + \lambda\,c^{\mathsf{T}}y + \lambda\,d + (1-\lambda)\,d \\ &= (1-\lambda)\,f(x) + \lambda\,f(y). \end{aligned}$$

Vale l'uguaglianza, quindi valgono sia $\leq$ sia $\geq$ e f è sia convessa sia concava. □

Convessità e concavità di funzioni differenziabili

Proposizione 4.17 – Condizione del primo ordine di convessità

Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme convesso aperto, sia $f : C \to \mathbb{R}$ e si supponga che ∇f sia continuo su C. Allora f è convessa su C se e solo se, per tutte le coppie di punti $x, y \in C$, si ha

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^{\mathsf{T}}(y - x).$$

Dimostrazione da fare

Dimostrazione

Necessità. Sia f convessa e siano $x, y \in C$.

1. Per $\lambda \in (0, 1]$, poiché $x + \lambda(y - x) = (1 - \lambda)\, x + \lambda\, y$, la convessità dà $f(x + \lambda(y - x)) \leq f(x) + \lambda\big(f(y) - f(x)\big)$.
2. Si porta $f(x)$ a sinistra e si divide per $\lambda > 0$:
$$\frac{f(x + \lambda(y - x)) - f(x)}{\lambda} \leq f(y) - f(x).$$
3. f è differenziabile in x per il Corollario 3.11, quindi per $\lambda \to 0^+$ il primo membro tende alla derivata direzionale lungo $y - x$, che vale $\nabla f(x)^{\mathsf{T}}(y - x)$ (derivata direzionale di una funzione differenziabile). Il secondo membro non dipende da λ, quindi $\nabla f(x)^{\mathsf{T}}(y - x) \leq f(y) - f(x)$.

Sufficienza. Siano $x, y \in C$, $\lambda \in [0, 1]$ e $z = (1 - \lambda)\, x + \lambda\, y$, che sta in C perché C è convesso.

1. L'ipotesi applicata alle coppie (z, x) e (z, y) dà $f(x) \geq f(z) + \nabla f(z)^{\mathsf{T}}(x - z)$ e $f(y) \geq f(z) + \nabla f(z)^{\mathsf{T}}(y - z)$.
2. Si moltiplica la prima per $1 - \lambda \geq 0$, la seconda per $\lambda \geq 0$ e si somma:
$$(1 - \lambda) f(x) + \lambda f(y) \geq f(z) + \nabla f(z)^{\mathsf{T}}\big((1 - \lambda)\, x + \lambda\, y - z\big) = f(z),$$
perché $(1 - \lambda)\, x + \lambda\, y - z = \mathbf{0}$. È la definizione di convessità.

□

Proposizione 4.18 – Condizione del primo ordine di stretta convessità

Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme convesso aperto, sia $f : C \to \mathbb{R}$ e si supponga che ∇f sia continuo su C. Allora f è strettamente convessa su C se e solo se, per tutte le coppie di punti $x, y \in C$ con $x \neq y$, si ha

$$f(y) > f(x) + \nabla f(x)^{\mathsf{T}}(y - x).$$

Solo enunciato

Proposizione 4.19 – Condizione del secondo ordine di convessità

Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme convesso aperto, sia $f : C \to \mathbb{R}$ e si supponga che la matrice hessiana $\nabla^2 f$ sia continua su C. Allora f è convessa su C se e solo se, per ogni $x \in C$, la matrice $\nabla^2 f(x)$ è semidefinita positiva.

Solo enunciato

Proposizione 4.20 – Convessità di una funzione quadratica

Sia Q una matrice simmetrica $n \times n$ e sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \frac{1}{2} x^{\mathsf{T}} Q\, x + c^{\mathsf{T}} x.$$

Allora f è convessa se e solo se Q è semidefinita positiva.

Dimostrazione da fare

Dimostrazione

Poiché Q è simmetrica, $\nabla f(x) = Q\,x + c$ e $\nabla^2 f(x) = Q$ in ogni punto, quindi $\nabla^2 f$ è continua. Basta applicare la Proposizione 4.19 con $C = \mathbb{R}^n$. □

Proposizione 4.21 – Condizione sufficiente di convessità stretta

Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme convesso aperto, sia $f : C \to \mathbb{R}$ e si supponga che la matrice hessiana $\nabla^2 f$ sia continua e definita positiva su C. Allora f è strettamente convessa su C.

Dimostrazione da fare

Dimostrazione

Siano $x, y \in C$ con $x \neq y$.

1. $\nabla^2 f$ esiste ed è continua, quindi f è due volte differenziabile su C (Proposizione 3.25(ii)). Il Teorema 3.3 (Taylor) vale anche per f definita e due volte differenziabile su un aperto che contiene il segmento di estremi x e y, qui C: con $w = x + \xi\,(y - x)$ e $\xi \in (0, 1)$,

$$f(y) = f(x) + \nabla f(x)^{\mathsf{T}}(y - x) + \frac{1}{2}\,(y - x)^{\mathsf{T}} \nabla^2 f(w)\,(y - x).$$

2. $w \in C$ perché C è convesso, quindi $\nabla^2 f(w)$ è definita positiva e, poiché $y - x \neq \mathbf{0}$, $(y - x)^{\mathsf{T}} \nabla^2 f(w)\,(y - x) > 0$.
3. Allora $f(y) > f(x) + \nabla f(x)^{\mathsf{T}}(y - x)$ per ogni $x \neq y$. Inoltre f è due volte differenziabile in ogni punto di C, quindi ∇f è continuo su C (Proposizione 3.25(i)). Per la Proposizione 4.18 f è strettamente convessa.

□

Proposizione 4.22 – Convessità stretta di una funzione quadratica

Sia Q una matrice simmetrica $n \times n$ e sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \frac{1}{2} x^{\mathsf{T}} Q\, x + c^{\mathsf{T}} x.$$

Allora f è strettamente convessa se e solo se Q è definita positiva.

Solo enunciato

Proposizione 4.23 – Condizione del primo ordine di concavità

Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme convesso aperto, sia $f : C \to \mathbb{R}$ e si supponga che ∇f sia continuo su C. Allora f è concava su C se e solo se, per tutte le coppie di punti $x, y \in C$, si ha

$$f(y) \leq f(x) + \nabla f(x)^{\mathsf{T}} (y - x).$$

Solo enunciato

Proposizione 4.24 – Condizione del primo ordine di stretta concavità

Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme convesso aperto, sia $f : C \to \mathbb{R}$ e si supponga che ∇f sia continuo su C. Allora f è strettamente concava su C se e solo se, per tutte le coppie di punti $x, y \in C$ con $x \neq y$, si ha

$$f(y) < f(x) + \nabla f(x)^{\mathsf{T}} (y - x).$$

Solo enunciato

Proposizione 4.25 – Condizione del secondo ordine di concavità

Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme convesso aperto, sia $f : C \to \mathbb{R}$ e si supponga che la matrice hessiana $\nabla^2 f$ sia continua su C. Allora f è concava su C se e solo se, per ogni $x \in C$, la matrice $\nabla^2 f(x)$ è semidefinita negativa.

Solo enunciato

Proposizione 4.26 – Condizione sufficiente di concavità stretta

Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme convesso aperto, sia $f : C \to \mathbb{R}$ e si supponga che la matrice hessiana $\nabla^2 f$ sia continua e definita negativa su C. Allora f è strettamente concava su C.

Solo enunciato

Insiemi convessi definiti mediante equazioni e disequazioni

Proposizione 4.27 – Insieme definito da una disequazione convessa

Sia $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione convessa. Allora l'insieme

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq 0\}$$

è convesso.

Dimostrazione da fare

Dimostrazione

Siano $x, y \in S$ e $\lambda \in [0, 1]$. Per la convessità di g

$$g\big((1-\lambda)\,x + \lambda\,y\big) \leq (1-\lambda)\,g(x) + \lambda\,g(y) \leq 0,$$

dove la seconda disuguaglianza segue da $g(x) \leq 0$, $g(y) \leq 0$, $1-\lambda \geq 0$ e $\lambda \geq 0$. Il punto $(1-\lambda)\,x + \lambda\,y$ appartiene quindi a S. □

Proposizione 4.28 – Insieme definito da più disequazioni convesse

Siano $g_1, \ldots, g_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funzioni convesse. Allora l'insieme

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \leq 0,\ i = 1, \ldots, m\}$$

è convesso.

Dimostrazione da fare

Dimostrazione

Per la Proposizione 4.27, per ogni $i \in \{1, \ldots, m\}$ l'insieme $S_i = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \leq 0\}$ è convesso. S è l'intersezione degli insiemi convessi S_i, quindi è convesso per la Proposizione 4.9. □

Proposizione 4.29 – Insieme definito da disequazioni convesse ed equazioni affini

Siano $g_1, \dots, g_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funzioni convesse e $h_1, \dots, h_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funzioni affini, $h_j(x) = a_j^\top x + d_j$ per $j = 1, \dots, p$. Allora l'insieme

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \leq 0,\ i = 1, \dots, m;\quad h_j(x) = 0,\ j = 1, \dots, p\}$$

è convesso.

Dimostrazione da fare

Dimostrazione

Per la Proposizione 4.27, per ogni $i = 1, \dots, m$ l'insieme $S_i = \{x : g_i(x) \leq 0\}$ è convesso. Per ogni $j = 1, \dots, p$ l'iperpiano $H_j = \{x : a_j^\top x + d_j = 0\}$ è convesso per la Proposizione 4.10. S è l'intersezione degli insiemi convessi S_i e H_j, quindi è convesso per la Proposizione 4.9. □

Appendice: elementi di algebra lineare

Proposizione 4.31 – Matrici simmetriche e autovalori

Sia Q una matrice reale e simmetrica $n \times n$. Allora:

1. Q è definita positiva se e solo se tutti gli autovalori di Q sono positivi;
2. Q è semidefinita positiva se e solo se tutti gli autovalori di Q sono non negativi;
3. Q è definita negativa se e solo se tutti gli autovalori di Q sono negativi;
4. Q è semidefinita negativa se e solo se tutti gli autovalori di Q sono non positivi;
5. Q è indefinita se e solo se ha sia autovalori negativi sia autovalori positivi.

Solo enunciato

Proposizione 4.32 – Condizioni necessarie sugli elementi diagonali

Sia Q una matrice reale e simmetrica $n \times n$. Allora:

(i) se Q è definita positiva (negativa), tutti gli elementi diagonali di Q sono necessariamente positivi (negativi);

(ii) se Q è semidefinita positiva (negativa), tutti gli elementi diagonali di Q sono necessariamente non negativi (non positivi);

(iii) se Q è semidefinita positiva oppure semidefinita negativa e $q_{ii} = 0$, deve essere necessariamente

$$q_{ij} = 0,\ j = 1, \dots, n; \qquad q_{hi} = 0,\ h = 1, \dots, n.$$

Solo enunciato

Proposizione 4.33 – Semidefinitezza e minori principali

Sia Q una matrice reale e simmetrica $n \times n$. Allora Q è semidefinita positiva se e solo se tutti i minori principali di Q, cioè i determinanti delle sottomatrici ottenute scegliendo gli stessi indici di riga e di colonna, sono non negativi.

Solo enunciato

Proposizione 4.34 – Criterio di Sylvester

Sia Q una matrice reale e simmetrica $n \times n$, e siano Δ_i, per $i = 1, \dots, n$, i minori principali di ordine i, cioè i determinanti delle sottomatrici formate dalle prime i righe e dalle prime i colonne di Q. Allora:

1. Q è definita positiva se e solo se $\Delta_i > 0$, $i = 1, \dots, n$;
2. Q è definita negativa se e solo se $(-1)^i \Delta_i > 0$, $i = 1, \dots, n$.

Solo enunciato

5 Massimi e minimi di funzioni di più variabili

Coincidenza di minimi locali e globali nel caso convesso

Proposizione 5.5 – Punti di minimo nel caso convesso

Sia $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme convesso e sia f una funzione convessa su S. Allora ogni punto di minimo locale di f su S è anche punto di minimo globale; inoltre l'insieme dei punti di minimo globale di f su S è un insieme convesso.

Solo enunciato

Proposizione 5.6 – Unicità del punto di minimo

Sia $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme convesso e sia f una funzione strettamente convessa su S. Se x^* è un punto di minimo locale di f su S, allora x^* è anche l'unico punto di minimo locale e l'unico punto di minimo globale di f su S.

Solo enunciato

Condizioni di esistenza della soluzione

Proposizione 5.7 – Teorema di Weierstrass

Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione continua e sia $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme non vuoto e compatto. Allora esistono un punto di minimo globale e un punto di massimo globale di f in S.

Dimostrazione da fare

Dimostrazione

Basta dimostrare l'esistenza del minimo, perché un punto di massimo di f è un punto di minimo della funzione continua $-f$. Sia $L = \inf_{x \in S} f(x)$, con $L = -\infty$ se f non è limitata inferiormente su S.

1. Per la definizione di estremo inferiore esiste una successione $\{x_k\}$ con $x_k \in S$ e $f(x_k) \to L$.
2. S è compatto, quindi, per il Corollario 2.26, esistono una sottosuccessione $\{x_k\}_{k \in K}$ e un punto $x^* \in S$ con $\lim_{k \in K,\, k \to \infty} x_k = x^*$.
3. f è continua in x^*: dato $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ con $|f(x) - f(x^*)| < \varepsilon$ se $\|x - x^*\| < \delta$, e $\|x_k - x^*\| < \delta$ per $k \in K$ abbastanza grande. Quindi $f(x_k) \to f(x^*)$ per $k \in K$, $k \to \infty$.
4. Per $k \in K$ vale anche $f(x_k) \to L$, perché è una sottosuccessione di una successione che tende a L. Per l'unicità del limite $f(x^*) = L$.
5. Allora L è finito, perché $f(x^*)$ è un numero reale, ed è un minorante dei valori di f su S: $f(x^*) = L \leq f(x)$ per ogni $x \in S$. Quindi x^* è un punto di minimo globale.

□

Condizioni di ottimalità nel caso di problemi non vincolati: direzioni di discesa

Un vettore $d \in \mathbb{R}^n$, $d \neq \mathbf{0}$, è una *direzione di discesa* per f in x se esiste $\bar{t} > 0$ tale che $f(x + t\,d) < f(x)$ per ogni $t \in (0, \bar{t}\,]$.

Proposizione 5.9 – Condizione di discesa del primo ordine

Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continuamente differenziabile nell'intorno di un punto $x \in \mathbb{R}^n$ e sia $d \in \mathbb{R}^n$ un vettore non nullo. Allora, se

$$\nabla f(x)^\mathsf{T} d < 0,$$

la direzione d è una direzione di discesa per f in x. Inversamente, se f è continuamente differenziabile e convessa in una sfera aperta $\mathcal{B}_\rho(x)$ di centro x e se d è una direzione di discesa in x, deve essere $\nabla f(x)^\mathsf{T} d < 0$.

Dimostrazione da fare

Dimostrazione

Se $\nabla f(x)^\mathsf{T} d < 0$, allora d è di discesa.

1. f è differenziabile in x (Corollario 3.11), quindi per la derivata direzionale di una funzione differenziabile $\lim_{t \to 0^+} \dfrac{f(x + t\,d) - f(x)}{t} = \nabla f(x)^\mathsf{T} d < 0$.
2. Per la permanenza del segno esiste $\bar{t} > 0$ tale che $\dfrac{f(x + t\,d) - f(x)}{t} < 0$ per ogni $t \in (0, \bar{t}\,]$. Poiché $t > 0$, il numeratore è negativo, cioè $f(x + t\,d) < f(x)$, e d è una direzione di discesa.

Se d è di discesa, allora $\nabla f(x)^\mathsf{T} d < 0$.

1. Per $t > 0$ abbastanza piccolo $f(x + t\,d) < f(x)$ e, riducendo t, anche $t\,\|d\| < \rho$, cioè $x + t\,d \in \mathcal{B}_\rho(x)$.
2. La sfera $\mathcal{B}_\rho(x)$ è aperta e convessa (Proposizione 4.12) e f è su di essa continuamente differenziabile e convessa, quindi per la Proposizione 4.17 $f(x + t\,d) \geq f(x) + t\,\nabla f(x)^\mathsf{T} d$.
3. Insieme alla discesa, $f(x) + t\,\nabla f(x)^\mathsf{T} d \leq f(x + t\,d) < f(x)$, quindi $t\,\nabla f(x)^\mathsf{T} d < 0$. Poiché $t > 0$, $\nabla f(x)^\mathsf{T} d < 0$.

□

Proposizione – L'antigradiente è una direzione di discesa

Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenziabile in $x \in \mathbb{R}^n$ con $\nabla f(x) \neq \mathbf{0}$. Allora $d = -\nabla f(x)$, detta antigradiente, è una direzione di discesa per f in x.

Dimostrazione da fare

Dimostrazione

Si ha $d \neq \mathbf{0}$ e

$$\nabla f(x)^\mathsf{T} d = -\nabla f(x)^\mathsf{T} \nabla f(x) = -\|\nabla f(x)\|^2 < 0.$$

Per la derivata direzionale di una funzione differenziabile $\lim_{t \to 0^+} \dfrac{f(x + t\,d) - f(x)}{t} = \nabla f(x)^\mathsf{T} d < 0$, quindi per la permanenza del segno esiste $\bar{t} > 0$ tale che $f(x + t\,d) < f(x)$ per ogni $t \in (0, \bar{t}\,]$, cioè d è una direzione di discesa. □

Proposizione 5.11 – Condizione di discesa del secondo ordine

Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ due volte continuamente differenziabile nell'intorno di un punto $x \in \mathbb{R}^n$ e sia $d \in \mathbb{R}^n$ un vettore non nullo. Si supponga che

$$\nabla f(x)^\mathsf{T} d = 0 \qquad \text{e} \qquad d^\mathsf{T} \nabla^2 f(x)\, d < 0,$$

cioè che d sia una direzione a curvatura negativa in x. Allora d è una direzione di discesa per f in x.

Dimostrazione da fare

Dimostrazione

1. $\nabla^2 f$ è continua vicino a x, quindi f è due volte differenziabile in x (Proposizione 3.25(ii)). Per $t > 0$

$$f(x + t\,d) = f(x) + t\,\nabla f(x)^\mathsf{T} d + \frac{1}{2} t^2\, d^\mathsf{T} \nabla^2 f(x)\, d + \beta(x, t\,d),$$

   con $\beta(x, t\,d)/t^2 \to 0$ per $t \to 0^+$, perché $\|t\,d\|^2 = t^2 \|d\|^2$.
2. Poiché $\nabla f(x)^\mathsf{T} d = 0$, dividendo per $t^2 > 0$

$$\frac{f(x + t\,d) - f(x)}{t^2} = \frac{1}{2}\, d^\mathsf{T} \nabla^2 f(x)\, d + \frac{\beta(x, t\,d)}{t^2}.$$

3. Il primo addendo è negativo e non dipende da t, mentre il secondo tende a 0. Per t abbastanza piccolo il secondo membro è quindi negativo.
4. Allora $f(x + t\,d) < f(x)$ per ogni $t > 0$ abbastanza piccolo, quindi d è una direzione di discesa.

□

Condizioni di minimo locale

Proposizione 5.12 – Condizione necessaria di minimo locale

Sia $x^* \in \mathbb{R}^n$ un punto di minimo locale del problema $\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$. Allora non può esistere una direzione di discesa per f in x^*.

Dimostrazione da fare

Dimostrazione

Per assurdo, sia d una direzione di discesa in x^*, con il suo $\bar{t}$, e sia $\mathcal{B}_\rho(x^*)$ la sfera della definizione di minimo locale.

1. Si sceglie $\hat{t}$ con $0 < \hat{t} < \bar{t}$ e $\hat{t}\,\|d\| < \rho$.
2. Allora $x^* + \hat{t}\,d \in \mathcal{B}_\rho(x^*)$ e, per la discesa, $f(x^* + \hat{t}\,d) < f(x^*)$.
3. Questo contraddice $f(x^*) \leq f(x)$ per ogni $x \in \mathcal{B}_\rho(x^*)$.

□

Proposizione 5.13 – Condizione necessaria del primo ordine

Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continuamente differenziabile nell'intorno di un punto $x^* \in \mathbb{R}^n$. Se x^* è un punto di minimo locale non vincolato di f, allora x^* è un punto stazionario di f, cioè

$$\nabla f(x^*) = \mathbf{0}.$$

Dimostrazione da fare

Dimostrazione

Per assurdo, sia $\nabla f(x^*) \neq \mathbf{0}$. La direzione $d = -\nabla f(x^*)$ soddisfa $\nabla f(x^*)^\mathsf{T} d = -\|\nabla f(x^*)\|^2 < 0$, quindi è una direzione di discesa in x^* per la Proposizione 5.9. Questo contraddice la Proposizione 5.12. □

Proposizione 5.14 – Condizione necessaria del secondo ordine

Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ due volte continuamente differenziabile nell'intorno di un punto $x^* \in \mathbb{R}^n$. Se x^* è un punto di minimo locale non vincolato di f, allora

(a) $\nabla f(x^*) = \mathbf{0}$;
(b) $y^\mathsf{T} \nabla^2 f(x^*)\, y \geq 0$ per ogni $y \in \mathbb{R}^n$, cioè $\nabla^2 f(x^*)$ è semidefinita positiva.

Dimostrazione da fare

Dimostrazione

La (a) segue dalla Proposizione 5.13. Se non valesse la (b), esisterebbe y con $y^\mathsf{T} \nabla^2 f(x^*)\, y < 0$. Poiché $\nabla f(x^*)^\mathsf{T} y = 0$ per la (a), per la Proposizione 5.11 y sarebbe una direzione di discesa per f in x^*, contro la Proposizione 5.12. □

Proposizione 5.15 – Condizione sufficiente: convessità locale

Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ due volte continuamente differenziabile in un intorno di $x^* \in \mathbb{R}^n$. Se

(a) $\nabla f(x^*) = \mathbf{0}$;
(b) esiste una sfera $\mathcal{B}_\rho(x^*)$ in cui la matrice hessiana è semidefinita positiva, cioè $y^\mathsf{T} \nabla^2 f(x)\, y \geq 0$ per ogni $x \in \mathcal{B}_\rho(x^*)$ e per ogni $y \in \mathbb{R}^n$,

allora x^* è un punto di minimo locale non vincolato di f.

Solo enunciato

Proposizione 5.16 – Condizione sufficiente del secondo ordine

Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ due volte continuamente differenziabile in un intorno di $x^* \in \mathbb{R}^n$. Si supponga che

(a) $\nabla f(x^*) = \mathbf{0}$;
(b) la matrice hessiana sia definita positiva in x^*, cioè $y^\mathsf{T} \nabla^2 f(x^*)\, y > 0$ per ogni $y \in \mathbb{R}^n$, $y \neq \mathbf{0}$.

Allora x^* è un punto di minimo locale stretto e inoltre esistono $\rho > 0$ e $\mu > 0$ tali che

$$f(x^*) \leq f(x) - \frac{\mu}{2} \|x - x^*\|^2 \qquad \text{per ogni } x \text{ con } \|x - x^*\| < \rho.$$

Solo enunciato

Condizioni di minimo globale nel caso convesso

Proposizione 5.17 – Condizione di minimo globale: caso convesso

Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continuamente differenziabile su $\mathbb{R}^n$ e convessa. Allora x^* è un punto di minimo globale di f su $\mathbb{R}^n$ se e solo se $\nabla f(x^*) = \mathbf{0}$.

Dimostrazione da fare

Dimostrazione

1. **Necessità.** Un punto di minimo globale è di minimo locale, quindi $\nabla f(x^*) = \mathbf{0}$ per la Proposizione 5.13.
2. **Sufficienza.** $\mathbb{R}^n$ è aperto e convesso e f è continuamente differenziabile e convessa, quindi la Proposizione 4.17 dà, per ogni $x \in \mathbb{R}^n$,

$$f(x) \geq f(x^*) + \nabla f(x^*)^{\mathsf{T}}(x - x^*) = f(x^*).$$

Quindi x^* è di minimo globale.

□

Proposizione 5.17, seconda parte – Caso strettamente convesso

Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continuamente differenziabile su $\mathbb{R}^n$ e strettamente convessa. Se $\nabla f(x^*) = \mathbf{0}$, allora x^* è l'unico punto stazionario di f e costituisce anche l'unico punto di minimo globale di f.

Solo enunciato

Proposizione 5.18 – Minimizzazione di una funzione quadratica

Sia $q(x) = \frac{1}{2}\, x^{\mathsf{T}} Q\, x + c^{\mathsf{T}} x$, con Q simmetrica e $c \in \mathbb{R}^n$. Allora:

(a) q ammette un punto di minimo se e solo se Q è semidefinita positiva ed esiste x^* tale che $Q\, x^* + c = \mathbf{0}$;

(b) q ammette un unico punto di minimo globale se e solo se Q è definita positiva.

Solo enunciato

Condizioni di massimo locale

Proposizione 5.19 – Massimo locale: condizione necessaria del primo ordine

Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continuamente differenziabile nell'intorno di un punto $x^* \in \mathbb{R}^n$. Se x^* è un punto di massimo locale non vincolato di f, allora x^* è un punto stazionario di f, cioè $\nabla f(x^*) = \mathbf{0}$.

Solo enunciato

Proposizione 5.20 – Massimo locale: condizione necessaria del secondo ordine

Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ due volte continuamente differenziabile nell'intorno di un punto $x^* \in \mathbb{R}^n$. Se x^* è un punto di massimo locale non vincolato di f, allora

(a) $\nabla f(x^*) = \mathbf{0}$;
(b) $y^\mathsf{T} \nabla^2 f(x^*)\, y \leq 0$ per ogni $y \in \mathbb{R}^n$, cioè $\nabla^2 f(x^*)$ è semidefinita negativa.

Solo enunciato

Proposizione 5.21 – Massimo locale: condizione sufficiente (concavità locale)

Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ due volte continuamente differenziabile in un intorno di $x^* \in \mathbb{R}^n$. Se

(a) $\nabla f(x^*) = \mathbf{0}$;
(b) esiste una sfera $\mathcal{B}_\rho(x^*)$ in cui la matrice hessiana è semidefinita negativa, cioè $y^\mathsf{T} \nabla^2 f(x)\, y \leq 0$ per ogni $x \in \mathcal{B}_\rho(x^*)$ e per ogni $y \in \mathbb{R}^n$,

allora x^* è un punto di massimo locale non vincolato di f.

Solo enunciato

Proposizione 5.22 – Massimo locale: condizione sufficiente del secondo ordine

Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ due volte continuamente differenziabile in un intorno di $x^* \in \mathbb{R}^n$. Si supponga che

(a) $\nabla f(x^*) = \mathbf{0}$;
(b) la matrice hessiana sia definita negativa in x^*, cioè $y^\mathsf{T} \nabla^2 f(x^*)\, y < 0$ per ogni $y \in \mathbb{R}^n$, $y \neq \mathbf{0}$.

Allora x^* è un punto di massimo locale stretto e inoltre esistono $\rho > 0$ e $\mu > 0$ tali che

$$f(x^*) \geq f(x) + \frac{\mu}{2} \|x - x^*\|^2 \qquad \text{per ogni } x \text{ con } \|x - x^*\| < \rho.$$

Solo enunciato

Condizioni di massimo globale nel caso di funzione concava

Proposizione 5.23 – Massimo globale: caso concavo

Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continuamente differenziabile su $\mathbb{R}^n$ e concava. Allora x^* è un punto di massimo globale di f su $\mathbb{R}^n$ se e solo se $\nabla f(x^*) = \mathbf{0}$. Inoltre, se f è strettamente concava su $\mathbb{R}^n$ e $\nabla f(x^*) = \mathbf{0}$, allora x^* è l'unico punto stazionario di f e costituisce anche l'unico punto di massimo globale di f.

Solo enunciato

Proposizione 5.24 – Massimizzazione di una funzione quadratica

Sia $q(x) = \frac{1}{2}\, x^{\mathsf{T}} Q\, x + c^{\mathsf{T}} x$, con Q simmetrica e $c \in \mathbb{R}^n$. Allora:

(a) q ammette un punto di massimo se e solo se Q è semidefinita negativa ed esiste x^* tale che $Q\, x^* + c = \mathbf{0}$;

(b) q ammette un unico punto di massimo globale se e solo se Q è definita negativa.

Solo enunciato

Riepilogo

Dimostrazioni da fare

Proposizione 1.36 – Caratterizzazione degli insiemi chiusi . . . 3
Teorema 2.25 – Bolzano-Weierstrass per successioni . . . 5
Teorema 2.27 – Bolzano-Weierstrass per insiemi (anche Teorema 1.5) . . . 6
Lemma 2.31 – Le funzioni coordinate sono continue . . . 7
Lemma 2.33 – Lipschitz implica continua . . . 7
Proposizione 3.5 – Derivata parziale e derivate direzionali . . . 9
Proposizione 3.7 – Differenziabile implica continua . . . 10
Proposizione – Derivata direzionale di una funzione differenziabile . . . 11
Proposizione 4.8 – Convessità di un semispazio . . . 14
Proposizione 4.9 – Intersezione di insiemi convessi . . . 15
Proposizione 4.10 – Convessità di un iperpiano . . . 15
Proposizione 4.12 – Convessità di una sfera . . . 16
Proposizione 4.14 – Le norme sono convesse . . . 17
Proposizione 4.16 – Funzioni affini . . . 17
Proposizione 4.17 – Condizione del primo ordine di convessità . . . 18
Proposizione 4.20 – Convessità di una funzione quadratica . . . 19
Proposizione 4.21 – Condizione sufficiente di convessità stretta . . . 19

Proposizione 4.27 – Insieme definito da una disequazione convessa · · · · · 21
Proposizione 4.28 – Insieme definito da più disequazioni convesse · · · · · 21
Proposizione 4.29 – Insieme definito da disequazioni convesse ed equazioni affini · · · · · 22
Proposizione 5.7 – Teorema di Weierstrass · · · · · 24
Proposizione 5.9 – Condizione di discesa del primo ordine · · · · · 25
Proposizione – L'antigradiente è una direzione di discesa · · · · · 26
Proposizione 5.11 – Condizione di discesa del secondo ordine · · · · · 26
Proposizione 5.12 – Condizione necessaria di minimo locale · · · · · 27
Proposizione 5.13 – Condizione necessaria del primo ordine · · · · · 27
Proposizione 5.14 – Condizione necessaria del secondo ordine · · · · · 28
Proposizione 5.17 – Condizione di minimo globale: caso convesso · · · · · 29

Solo enunciato

Teorema 1.1 – Esistenza degli estremi superiore e inferiore · · · · · 2
Teorema 1.2 – Caratterizzazione dell'estremo superiore · · · · · 2
Teorema 1.3 – Caratterizzazione dell'estremo inferiore · · · · · 2
Proposizione 1.16 – Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz · · · · · 2
Proprietà 1.30 – Unione e intersezione di insiemi aperti · · · · · 3
Proprietà 1.31 – Intersezione e unione di insiemi chiusi · · · · · 3
Proposizione 2.10 – Limite di una funzione vettoriale e limiti delle componenti · · · · · 4
Proposizione 2.14 – Successioni limitate e componenti · · · · · 4
Teorema 2.24 – Successioni limitate in $\mathbb{R}$ · · · · · 4
Corollario 2.26 – Successioni in un compatto · · · · · 5
Teorema 2.28 – Teorema ponte · · · · · 6
Teorema 2.35 – Heine-Cantor · · · · · 8
Teorema 2.37 – Limite mediante restrizioni · · · · · 8
Proposizione 2.39 – Funzioni lineari · · · · · 8
Proposizione 2.40 – Rappresentazione simmetrica di una forma quadratica · · · · · 8
Proposizione 3.1 – Derivabile e differenziabile · · · · · 9
Proposizione 3.8 – Condizione necessaria e condizione sufficiente di differenziabilità · · · · · 10
Corollario 3.11 – Funzioni di classe C^1 · · · · · 11
Proposizione 3.20 – Differenziabilità di una funzione vettoriale e matrice jacobiana · · · · · 12
Proposizione 3.25 – Funzioni due volte differenziabili e matrice hessiana · · · · · 12
Teorema 3.1 – Teorema della media · · · · · 13
Teorema 3.2 – Teorema della media in forma integrale · · · · · 13
Teorema 3.3 – Teorema di Taylor · · · · · 13
Proposizione 4.2 – Condizione necessaria e sufficiente per sottospazi lineari · · · · · 14

Proposizione 4.3 – Dimensione di un sottospazio lineare · · · · · 14
Proposizione 4.11 – Convessità di un poliedro · · · · · 15
Proposizione 4.18 – Condizione del primo ordine di stretta convessità · · · · · 18
Proposizione 4.19 – Condizione del secondo ordine di convessità · · · · · 19
Proposizione 4.22 – Convessità stretta di una funzione quadratica · · · · · 20
Proposizione 4.23 – Condizione del primo ordine di concavità · · · · · 20
Proposizione 4.24 – Condizione del primo ordine di stretta concavità · · · · · 20
Proposizione 4.25 – Condizione del secondo ordine di concavità · · · · · 20
Proposizione 4.26 – Condizione sufficiente di concavità stretta · · · · · 20
Proposizione 4.31 – Matrici simmetriche e autovalori · · · · · 22
Proposizione 4.32 – Condizioni necessarie sugli elementi diagonali · · · · · 22
Proposizione 4.33 – Semidefinitezza e minori principali · · · · · 23
Proposizione 4.34 – Criterio di Sylvester · · · · · 23
Proposizione 5.5 – Punti di minimo nel caso convesso · · · · · 23
Proposizione 5.6 – Unicità del punto di minimo · · · · · 23
Proposizione 5.15 – Condizione sufficiente: convessità locale · · · · · 28
Proposizione 5.16 – Condizione sufficiente del secondo ordine · · · · · 28
Proposizione 5.17, seconda parte – Caso strettamente convesso · · · · · 29
Proposizione 5.18 – Minimizzazione di una funzione quadratica · · · · · 29
Proposizione 5.19 – Massimo locale: condizione necessaria del primo ordine · · · · · 30
Proposizione 5.20 – Massimo locale: condizione necessaria del secondo ordine · · · · · 30
Proposizione 5.21 – Massimo locale: condizione sufficiente (concavità locale) · · · · · 30
Proposizione 5.22 – Massimo locale: condizione sufficiente del secondo ordine · · · · · 30
Proposizione 5.23 – Massimo globale: caso concavo · · · · · 31
Proposizione 5.24 – Massimizzazione di una funzione quadratica · · · · · 31