

Appunti di Sistemi Dinamici

Canale 2 · Prof.ssa Claudia Califano

Capitolo 1: Introduzione ai sistemi dinamici

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dalle lezioni in aula e dal materiale del corso

Argomenti: Automatica e sistemi dinamici · Elementi con memoria · Tempo continuo e discreto

Modello in variabili di stato · Matrici A, B, C, D · Forma compagna

Rappresentazione implicita · Schema di simulazione

Massa-molla-smorzatore · Rete elettrica equivalente · Corso di laurea

Equilibri e linearizzazione: il pendolo

Indice

1 Automatica e sistemi dinamici	1
2 Legame istantaneo ed elementi con memoria	1
3 Tempo continuo e tempo discreto	2
4 Il modello in variabili di stato	2
5 Il sistema massa-molla-smorzatore	3
5.1 Scelta dello stato	4
6 Le matrici A, B, C, D	5
6.1 Schema di simulazione	6
7 Comportamento del carrello e autovalori	7
8 Scatola nera	8
9 Rappresentazioni equivalenti: una rete elettrica	8
10 Un sistema a tempo discreto: il corso di laurea	10
11 Sistemi non lineari: equilibri e approssimazione lineare	11
11.1 Il pendolo	11
12 Esercizi	13
13 Soluzioni	15

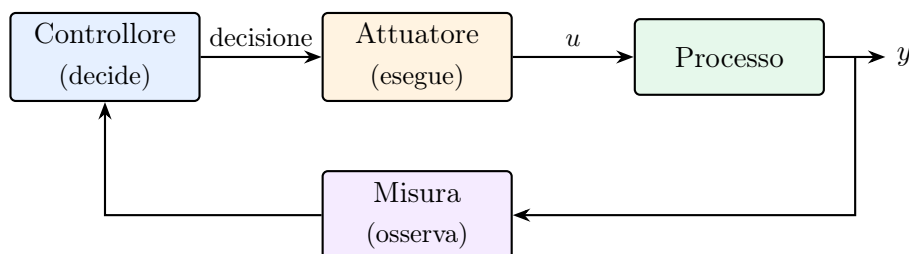
1 Automatica e sistemi dinamici

Definizione – Automatica

L'**automatica** studia e progetta sistemi che svolgono *in autonomia* un compito assegnato, compensando in tempo reale perturbazioni e incertezze.

Servono tre ingredienti, e il compito riesce solo se ci sono tutti:

- la **misura**: come stanno andando le cose;
- il **controllo**: decide l'azione sulla base delle misure;
- l'**attuazione**: esegue l'azione decisa.



Il percorso va dal processo alle **equazioni** (modello), dalle equazioni al **comportamento**, dal comportamento al **controllore**. Questo corso copre i primi due passi; il progetto del controllore è del corso successivo.

Definizione – Sistema dinamico

Un **sistema dinamico** è un insieme di elementi interconnessi con **ingressi** (le cause) e **uscite** (gli effetti da osservare), in cui il legame causa-effetto **non è istantaneo**: l'uscita dipende anche dalla **storia passata** degli ingressi.

2 Legame istantaneo ed elementi con memoria

Definizione – Elemento con memoria

Un elemento è **con memoria** se il suo comportamento in un istante dipende dalla condizione iniziale e dalla storia passata, non solo dalla causa nello stesso istante. Condensatore e induttanza hanno memoria; la resistenza no.

Resistenza: $V(t) = Ri(t)$. Il legame è *algebrico* e *istantaneo*: la corrente all'istante t basta a dare la tensione allo stesso istante.

Condensatore: $i_C(t) = C \dot{V}_C(t)$. Integrando da t_0 a t :

$$V_C(t) = \underbrace{V_C(t_0)}_{\text{condizione iniziale}} + \underbrace{\frac{1}{C} \int_{t_0}^t i_C(\tau) d\tau}_{\text{storia da } t_0 \text{ a } t}.$$

Per la tensione in t servono il valore iniziale e tutta la corrente fra t_0 e t . Per questo il corso lavora con **equazioni differenziali**.

3 Tempo continuo e tempo discreto

Definizione – Tempo continuo e tempo discreto

- **Tempo continuo:** $t \in \mathbb{R}$.
- **Tempo discreto:** le grandezze si considerano solo a istanti cadenzati, $k \in \mathbb{Z}$, a distanza unitaria.

Esempio – Popolazione

Con $x(k)$ la popolazione all'anno k , α il tasso di natalità e β quello di mortalità:

$$x(k+1) = x(k) + \alpha x(k) - \beta x(k).$$

Un modello più fedele divide la popolazione in **classi d'età**, ciascuna con i propri coefficienti: il corso di laurea della Sezione 10 ne è un caso.

4 Il modello in variabili di stato

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad u(t) \in \mathbb{R}^m, \quad y(t) \in \mathbb{R}^p \quad (1)$$

Definizione – Stato, ingresso, uscita

- x , lo **stato**: il vettore che descrive il comportamento del sistema;
- u , l'**ingresso**: ciò che agisce sul sistema;
- y , l'**uscita**: ciò che si vuole misurare o osservare.

Le matrici A , B , C , D sono costanti e a coefficienti reali.

L'uscita dipende da stato e ingresso in modo *istantaneo*; la memoria del sistema è tutta nella prima equazione, differenziale.

Definizione – Rappresentazione implicita

Il modello (1) è la **rappresentazione implicita** (o differenziale) del sistema: dà il legame fra stato, ingresso e uscita, non la soluzione $x(t)$. Il secondo membro $Ax + Bu$ si chiama **funzione generatrice**, $Cx + Du$ **trasformazione di uscita**.

Definizione – Lineare, stazionario, a dimensione finita

- **Lineare**: i secondi membri sono combinazioni lineari di x e u , senza potenze o altre funzioni non lineari.
- **Stazionario**: il comportamento dipende solo dal tempo trascorso dall'inizializzazione, $t - t_0$, non dall'istante t . Nel modello (1): A, B, C, D non dipendono da t .
- **A dimensione finita**: $x \in \mathbb{R}^n$.

A tempo discreto l'equazione di stato diventa un'**equazione alle differenze**:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad y(k) = Cx(k) + Du(k).$$

Per costruire il modello di un processo:

1. scegli l'**ingresso** u : chi agisce sul sistema;
2. scegli l'**uscita** y : che cosa si misura;
3. scrivi le equazioni del processo e scegli lo **stato** x in modo da avere solo equazioni del primo ordine.

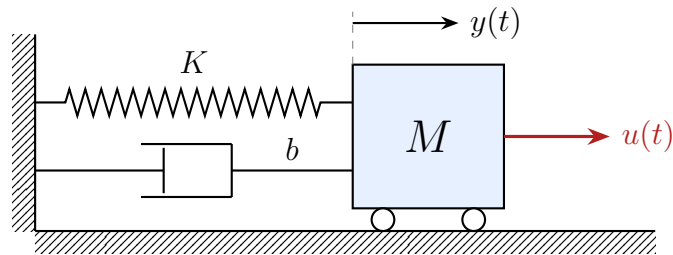
Nota – Notazione del libro

Il libro indica con p il numero degli ingressi e con q quello delle uscite; qui sono m e p .

5 Il sistema massa-molla-smorzatore

$$M \ddot{y}(t) + b \dot{y}(t) + K y(t) = u(t) \quad (2)$$

Un carrello di massa M scorre su una guida ed è legato alla parete da una molla (costante K) e da uno smorzatore (coefficiente b). L'ingresso è la forza u , l'uscita lo spostamento y .



La forza u bilancia tre termini: l'inerzia $M\ddot{y}$, la forza elastica Ky (proporzionale allo spostamento) e l'attrito $b\dot{y}$ (proporzionale alla velocità). L'equazione è del **secondo ordine** perché ci sono due memorie: la massa (energia cinetica) e la molla (energia potenziale elastica).

5.1 Scelta dello stato

Si prendono posizione e velocità: $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$. Allora

- $\dot{x}_1 = \dot{y} = x_2$;
- $\dot{x}_2 = \ddot{y}$, che si ricava da (2): $\dot{x}_2 = -\frac{K}{M}x_1 - \frac{b}{M}x_2 + \frac{1}{M}u$;
- $y = x_1$.

Un'equazione del secondo ordine è diventata un sistema di due equazioni del primo ordine, con $x \in \mathbb{R}^2$.

Osservazione – Che cosa rappresenta lo stato

Noto lo stato all'istante t e l'ingresso da t in poi, si calcola l'uscita futura: lo stato riassume la storia del sistema, come $V_C(t_0)$ per il condensatore.

Proposizione – Ordine $n \Rightarrow$ stato in $\mathbb{R}^n$

Un'equazione differenziale di ordine n in y diventa un sistema di n equazioni del primo ordine con

$$x_1 = y, \quad x_2 = \dot{y}, \quad \dots, \quad x_n = y^{(n-1)}.$$

Le prime $n-1$ equazioni sono $\dot{x}_i = x_{i+1}$; l'ultima si ricava isolando $y^{(n)}$ (Esercizio 1).

Proposizione – Forma compagna

Per $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{y} + a_0y = u$ la scelta precedente dà

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0.$$

Il polinomio caratteristico si legge dall'ultima riga, cambiata di segno.

Per il carrello, dividendo (2) per M :

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^2 + \frac{b}{M}\lambda + \frac{K}{M}.$$

Esercizio 2 applica la forma compagna a un'equazione del terzo ordine con un parametro.

6 Le matrici A, B, C, D

Matrice	Dimensione	Righe da	Colonne da
A	$n \times n$	$\dot{x} \in \mathbb{R}^n$	$x \in \mathbb{R}^n$
B	$n \times m$	$\dot{x} \in \mathbb{R}^n$	$u \in \mathbb{R}^m$
C	$p \times n$	$y \in \mathbb{R}^p$	$x \in \mathbb{R}^n$
D	$p \times m$	$y \in \mathbb{R}^p$	$u \in \mathbb{R}^m$

Le *righe* vengono dal membro sinistro ($\dot{x}$ o y), le *colonne* dal vettore moltiplicato (x o u). Si fissano le dimensioni prima di riempire le matrici.

Dalle equazioni alle matrici. La riga i di A contiene i coefficienti di $x_1, \dots, x_n$ nella i -esima equazione di stato; la riga i di B quelli di $u_1, \dots, u_m$. C e D si leggono allo stesso modo dalle equazioni di uscita.

Esempio – Matrici del massa-molla-smorzatore

$n = 2, m = p = 1$. Dalle equazioni della Sezione 5:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{b}{M} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = 0.$$

$D = 0$ perché u non compare nell'equazione di uscita.

Dalle matrici alle equazioni. La componente i di $\dot{x}$ è la riga i di A per x più la riga i di B per u . Il numero di colonne di B dà il numero di ingressi.

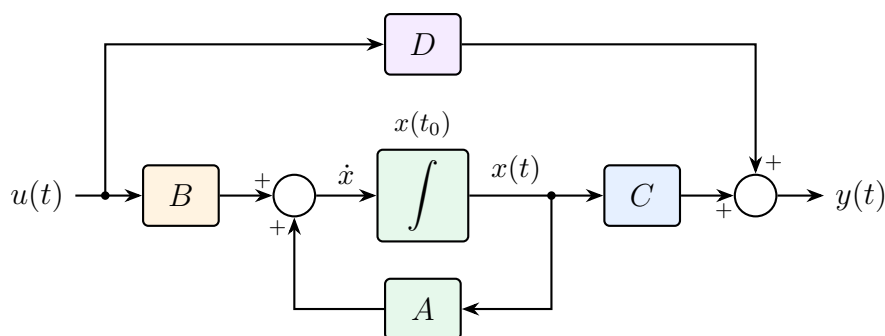
Esempio – Lettura di una forma compatta

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u \implies \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + 2x_2 + u_1 + u_2 \\ \dot{x}_2 &= 3x_1 + 2x_2 + u_2 \end{aligned} \quad u \in \mathbb{R}^2$$

6.1 Schema di simulazione

Definizione – Schema di simulazione

Lo **schema di simulazione** (o di **realizzazione**) rappresenta il modello (1) con tre soli tipi di blocchi: **integratori**, **moltiplicatori** per le matrici A , B , C , D e **sommatori**.



L'integratore riceve $\dot{x}$ e restituisce x , a partire dalla condizione iniziale $x(t_0)$. Lo schema ha una parte *dinamica*, gli integratori, e una *istantanea*, il blocco D , che porta u direttamente in uscita. Fissati A , B , C , D , $x(t_0)$ e l'ingresso, lo schema simula il sistema e ne dà l'uscita.

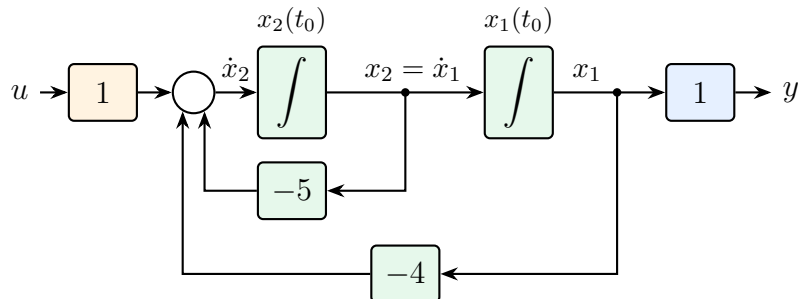
Per disegnarlo componente per componente:

1. un integratore per ogni variabile di stato, con in uscita x_i ;
2. all'ingresso dell'integratore i , un sommatore con i termini della riga i di A e di B , ciascuno moltiplicato per il suo coefficiente: la somma è $\dot{x}_i$;
3. ogni uscita y_j come somma dei termini della riga j di C e di D .

I coefficienti nulli non si disegnano.

Esempio – Schema del massa-molla-smorzatore

Con $M = 1$, $K = 4$, $b = 5$ (il caso senza oscillazioni della Sezione 7): $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = -4x_1 - 5x_2 + u$, $y = x_1$.



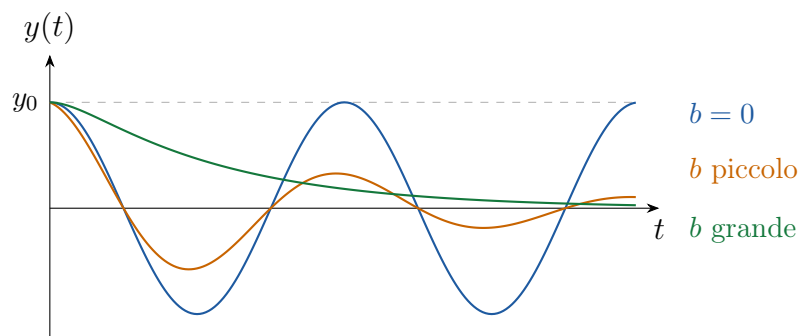
L'uscita x_2 del primo integratore è $\dot{x}_1$ ed entra nel secondo. In generale i guadagni sono $-K/M$, $-b/M$ e $1/M$; $D = 0$, quindi nessun collegamento diretto da u a y .

Esercizio 3 traccia lo schema di un sistema di dimensione 3.

7 Comportamento del carrello e autovalori

Il comportamento del carrello spostato e lasciato dipende dagli **autovalori** di A , radici di $\lambda^2 + \frac{b}{M}\lambda + \frac{K}{M}$. Con $M = 1$:

K, b	Autovalori	Comportamento	Come se
4, 5	$-1, -4$ reali	torna all'equilibrio senza oscillare	in un liquido denso
10, 2	$-1 \pm 3j$ complessi	oscilla e si ferma	in aria
10, 0	$\pm j\sqrt{10}$ immaginari	oscilla per sempre	nel vuoto



Osservazione – Il segno di $b^2 - 4MK$

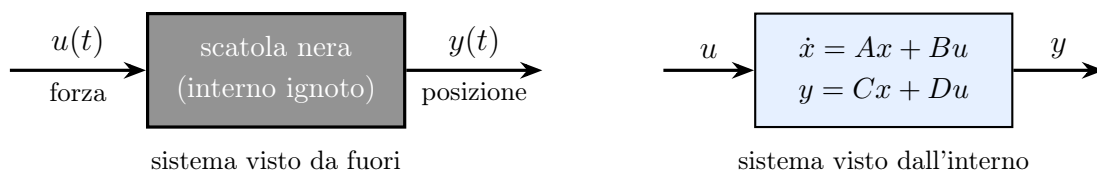
- $b^2 > 4MK$: autovalori reali distinti, nessuna oscillazione;
- $b^2 < 4MK$: complessi coniugati, oscillazioni (smorzate se $b > 0$);
- $b^2 = 4MK$: reali coincidenti.

Con $b > 0$ la parte reale è negativa e il carrello torna all'equilibrio.

8 Scatola nera

Definizione – Scatola nera

Un sistema di cui si osservano solo gli effetti degli ingressi sulle uscite, senza conoscere l'interno, si dice **scatola nera**. Applicando ingressi e misurando le uscite si cerca il modello interno: è l'**identificazione**.



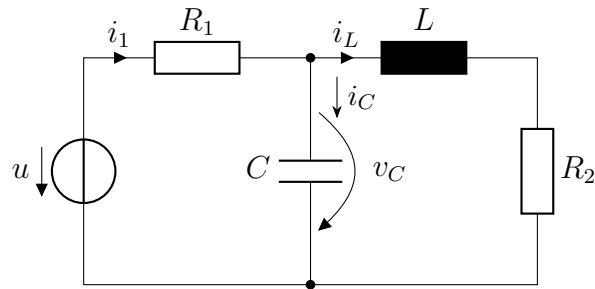
9 Rappresentazioni equivalenti: una rete elettrica

Osservazione – Due conclusioni

- **Uno stesso sistema ha tante rappresentazioni**, con matrici diverse.
- **Sistemi diversi possono avere la stessa rappresentazione**: con i parametri giusti, una rete elettrica si comporta come il carrello.

Il comportamento non dipende dalla rappresentazione: le matrici A di rappresentazioni diverse sono **simili**, $\tilde{A} = TAT^{-1}$ con T invertibile, e hanno gli stessi autovalori.

La rete ha ingresso la tensione u del generatore e uscita la corrente i_L nell'induttanza. Servono le leggi di Kirchhoff (alle maglie e ai nodi) e quelle dei componenti: $V = Ri$, $C \dot{v}_C = i_C$, $L \dot{i}_L = v_L$.



Esempio – Equazioni della rete

- prima maglia: $u = R_1 i_1 + v_C$;
- nodo: $i_1 = C \dot{v}_C + i_L$;
- seconda maglia: $v_C = L \dot{i}_L + R_2 i_L$.

Con lo stato dato dagli elementi con memoria, $x_1 = v_C$, $x_2 = i_L$:

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{R_1 C} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R_2}{L} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1 C} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = 0.$$

Esempio – La stessa equazione del carrello

Derivando la seconda maglia, $\dot{v}_C = L \ddot{i}_L + R_2 \dot{i}_L$; sostituendo nel nodo e moltiplicando per R_1 :

$$R_1 L C \ddot{i}_L + (R_1 R_2 C + L) \dot{i}_L + (R_1 + R_2) i_L = u,$$

cioè (2) con $M = R_1 L C$, $b = R_1 R_2 C + L$, $K = R_1 + R_2$.

10 Un sistema a tempo discreto: il corso di laurea

Esempio – Modello del corso di laurea

$x_1(k)$, $x_2(k)$, $x_3(k)$ sono gli iscritti al primo, secondo e terzo anno nell'anno k ; $u(k)$ i nuovi immatricolati; $y(k)$ i laureati; $\alpha_i \in [0, 1]$ la frazione di ripetenti dell'anno i .

$$\begin{cases} x_1(k+1) = \alpha_1 x_1(k) + u(k) \\ x_2(k+1) = (1 - \alpha_1) x_1(k) + \alpha_2 x_2(k) \\ x_3(k+1) = (1 - \alpha_2) x_2(k) + \alpha_3 x_3(k) \\ y(k) = (1 - \alpha_3) x_3(k) \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 1 - \alpha_1 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 1 - \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 - \alpha_3 \end{pmatrix}, \quad D = 0.$$

$D = 0$: nessuno si laurea appena immatricolato.

La Figura 1 mostra i passaggi fra gli anni in un anno k .

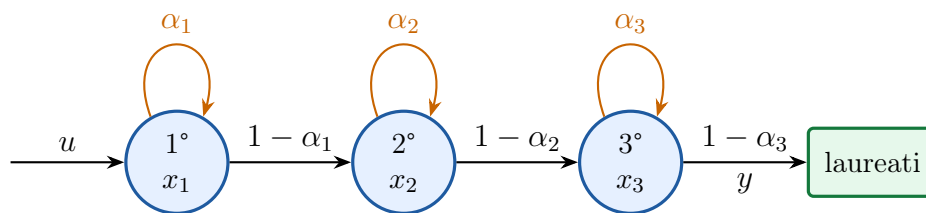


Figura 1: Corso di laurea a tempo discreto: dall'anno i ripete la frazione α_i e passa avanti la frazione $1 - \alpha_i$; u sono gli immatricolati, y i laureati.

Ipotesi. Ogni studente passa all'anno successivo o ripete; al terzo anno si laurea o ripete; non ci sono abbandoni né trasferimenti.

Osservazione – Autovalori a tempo discreto

A è triangolare: gli autovalori sono α_1 , α_2 , α_3 . A tempo continuo la soluzione va come $e^{\lambda t}$ e conta il *segno* della parte reale; a tempo discreto va come λ^k e conta il **modulo**. Se $|\alpha_i| < 1$, senza nuovi immatricolati alla lunga si laureano tutti.

11 Sistemi non lineari: equilibri e approssimazione lineare

Definizione – Punto di equilibrio

Per $\dot{x} = f(x, u)$, la coppia (x_e, u_e) è di **equilibrio** se $f(x_e, u_e) = 0$: il sistema in x_e con ingresso u_e ci resta.

- **stabile**: dopo una piccola perturbazione il sistema torna verso x_e ;
- **instabile**: una piccola perturbazione lo allontana.

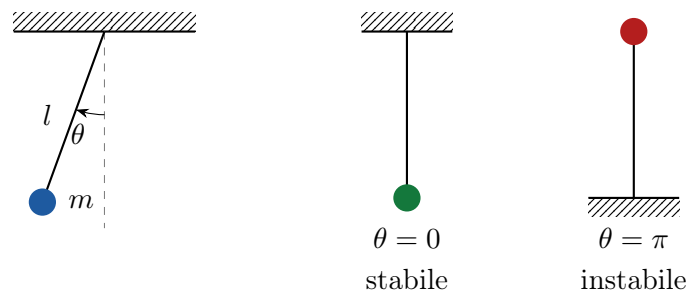
Proposizione – Approssimazione lineare

Vicino a un equilibrio, con $z = x - x_e$ e $v = u - u_e$,

$$\dot{z} = Az + Bv, \quad A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_e, u_e}, \quad B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x_e, u_e}.$$

Si ottiene dallo sviluppo di Taylor al primo ordine: $f(x, u) \approx f(x_e, u_e) + A(x - x_e) + B(u - u_e)$, con $f(x_e, u_e) = 0$. Poiché x_e è costante, $\dot{z} = \dot{x}$. Il nuovo stato z serve a togliere il termine costante $-Ax_e$.

11.1 Il pendolo



Esempio – Modello del pendolo

θ angolo dalla verticale, m massa, l lunghezza, k attrito, u forza tangente al moto:

$$ml\ddot{\theta} + mg\sin\theta + kl\dot{\theta} = u.$$

Con $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$ e uscita l'angolo:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\frac{g}{l}\sin x_1 - \frac{k}{m}x_2 + \frac{1}{ml}u, \quad y = x_1.$$

La non linearità è in $\sin x_1$.

Equilibri con $u_e = 0$: $x_2 = 0$ e $\sin x_1 = 0$, cioè $x_1 = h\pi$, $h \in \mathbb{Z}$. Le posizioni fisiche sono due: in basso ($\theta = 0$) e in alto ($\theta = \pi$).

Esempio – Pendolo linearizzato

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} \cos x_1 & -\frac{k}{m} \end{pmatrix}, \quad B = \frac{\partial f}{\partial u} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml} \end{pmatrix}.$$

- **In basso**, $\cos 0 = 1$: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{k}{m} \end{pmatrix}$, $\det(\lambda I - A) = \lambda^2 + \frac{k}{m}\lambda + \frac{g}{l}$.
- **In alto**, $\cos \pi = -1$: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & -\frac{k}{m} \end{pmatrix}$, $\det(\lambda I - A) = \lambda^2 + \frac{k}{m}\lambda - \frac{g}{l}$.

Le due A sono in forma compagna: il polinomio si legge dall'ultima riga.

Nota – Regola di Cartesio per il secondo grado

Per $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$ a coefficienti reali non nulli, le radici a parte reale positiva sono tante quante le **variazioni di segno** fra coefficienti consecutivi. Per grado più alto serve il **criterio di Routh**.

Osservazione – Stabilità dei due equilibri

- **In basso**: coefficienti tutti positivi, nessuna variazione, autovalori a parte reale negativa: equilibrio **stabile**.
- **In alto**: una variazione, un autovalore a parte reale positiva: equilibrio **instabile**.

Vale solo vicino all'equilibrio, dove l'approssimazione lineare è valida. Non serve calcolare le soluzioni: basta il segno degli autovalori.

Riepilogo

- **Sistema dinamico:** legame causa-effetto non istantaneo; condensatore e induttanza hanno memoria, la resistenza no.
- **Rappresentazione implicita:** $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx + Du$, con A $n \times n$, B $n \times m$, C $p \times n$, D $p \times m$ costanti.
- **Ordine n :** $x = (y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)})^T \in \mathbb{R}^n$; in forma compagna il polinomio caratteristico si legge dall'ultima riga.
- **Carrello:** $M\ddot{y} + b\dot{y} + Ky = u$; $b^2 > 4MK$ nessuna oscillazione, $b^2 < 4MK$ oscillazioni, $b = 0$ oscillazione perpetua.
- **Schema di simulazione:** un integratore per ogni x_i , che riceve la somma dei termini della riga i di A e B .
- **Rappresentazioni equivalenti:** stesso sistema, più rappresentazioni; sistemi diversi, stessa equazione (rete: $M = R_1LC$, $b = R_1R_2C + L$, $K = R_1 + R_2$).
- **Tempo discreto:** $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$; conta il modulo degli autovalori.
- **Non lineare:** equilibrio $f(x_e, u_e) = 0$, poi $\dot{z} = Az + Bv$ con le jacobiane; pendolo stabile in basso, instabile in alto.

12 Esercizi

Esercizio 1 – Equazione lineare di ordine n

Rappresentare con lo stato $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{y} + a_0y = u$, con $u, y \in \mathbb{R}$.

Soluzione a pagina 15 →

Esercizio 2 – Esonero del 13/11/2023, Canale 2, Prof.ssa Claudia Califano, esercizio 2, adattato

Determinare una rappresentazione con lo spazio di stato di un sistema descritto dall'equazione differenziale

$$y^{(3)}(t) + 2y^{(2)}(t) + k\dot{y}(t) + 2ky(t) = u(t).$$

Per il sistema determinato dire, al variare del parametro k , se gli autovalori hanno tutti parte reale negativa o se qualcuno ha parte reale positiva.

Soluzione a pagina 15 →

Esercizio 3 – Esonero del 13/11/2023, Canale 2, Prof.ssa Claudia Califano, esercizio 1, adattato

Si consideri il sistema descritto da

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t), \quad y(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x(t).$$

Tracciare lo schema di simulazione.

Soluzione a pagina 16 →

13 Soluzioni

Soluzione dell'Esercizio 1 – Equazione lineare di ordine n

Con $x_i = y^{(i-1)}$:

$$\dot{x}_1 = x_2, \dots, \dot{x}_{n-1} = x_n, \quad \dot{x}_n = -a_0x_1 - a_1x_2 - \dots - a_{n-1}x_n + u.$$

Quindi A è la matrice in forma compagna e

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad D = 0.$$

Per $n = 2$, dividendo (2) per M ($a_0 = K/M$, $a_1 = b/M$, ingresso u/M), si ritrova il carrello.

[← Torna all'Esercizio 1, pagina 13](#)

Soluzione dell'Esercizio 2 – Esonero del 13/11/2023, Canale 2, Prof.ssa Claudia Califano, esercizio 2, adattato

Rappresentazione. Con $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$, $x_3 = \ddot{y}$ (Esercizio 1 con $n = 3$, $a_0 = 2k$, $a_1 = k$, $a_2 = 2$):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2k & -k & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = 0.$$

Autovalori. A è in forma compagna: dall'ultima riga,

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^3 + 2\lambda^2 + k\lambda + 2k = \lambda^2(\lambda + 2) + k(\lambda + 2) = (\lambda + 2)(\lambda^2 + k).$$

Un autovalore è sempre $\lambda_1 = -2$; gli altri due sono le radici di $\lambda^2 + k = 0$.

- $k > 0$: $\lambda_{2,3} = \pm j\sqrt{k}$, immaginari, a parte reale nulla. Nessun autovalore ha parte reale positiva, ma non hanno tutti parte reale negativa: come il carrello con $b = 0$, la parte legata a $\pm j\sqrt{k}$ oscilla per sempre.
- $k < 0$: $\lambda_{2,3} = \pm\sqrt{-k}$, reali; $+\sqrt{-k} > 0$ ha parte reale positiva.
- $k = 0$: $\lambda_{2,3} = 0$, a parte reale nulla.

Per nessun valore di k gli autovalori hanno tutti parte reale negativa; per $k < 0$ uno ha parte reale positiva.

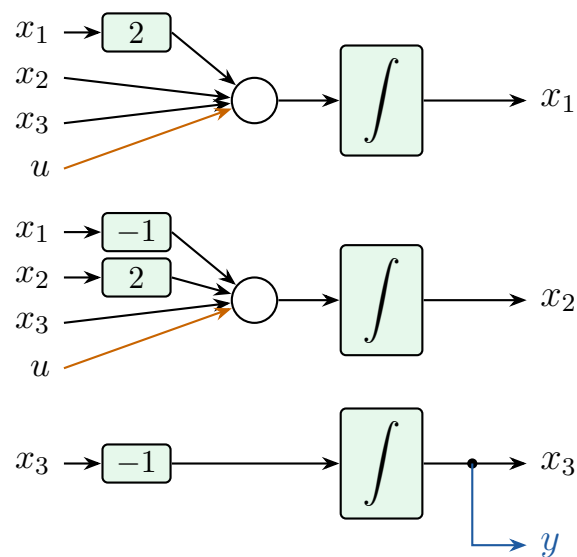
[← Torna all'Esercizio 2, pagina 13](#)

Soluzione dell'Esercizio 3 – Esonero del 13/11/2023, Canale 2, Prof.ssa Claudia Califano, esercizio 1, adattato

Equazioni per componenti, riga per riga:

$$\dot{x}_1 = 2x_1 + x_2 + x_3 + u, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + 2x_2 + x_3 + u, \quad \dot{x}_3 = -x_3, \quad y = x_3.$$

Schema. Tre integratori; davanti all'integratore i un sommatore riceve i termini dell'equazione di $\dot{x}_i$. Per $\dot{x}_3$ c'è un solo termine e il sommatore non serve. Per non incrociare i collegamenti, i segnali in ingresso sono indicati con il loro nome: ogni x_j viene dall'uscita del proprio integratore.



Il terzo integratore non riceve né u né x_1, x_2 : x_3 evolve da solo. $D = 0$: nessun collegamento diretto da u a y .

[← Torna all'Esercizio 3, pagina 14](#)