

Appunti di Sistemi Dinamici

Canale 2 · Prof.ssa Claudia Califano

Capitolo 2: Autovalori, cambio di coordinate e soluzione delle equazioni di stato

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dalle lezioni in aula e dal materiale del corso

Argomenti: Richiami di algebra lineare · Cambio di coordinate e matrici simili
Diagonalizzazione · Sistema diagonale: prede e predatori
Traiettorie nella base degli autovettori · Risposta libera e forzata
Sovrapposizione degli effetti · Stazionarietà · Esponenziale di matrice
Soluzione dell'equazione di stato con ingresso

Indice

1	Richiami di algebra lineare	1
2	Cambio di coordinate e matrici simili	2
2.1	Diagonalizzazione	3
3	Il caso diagonale: prede e predatori	3
3.1	Autovalori, autovettori e traiettorie	4
4	Traiettorie nella base degli autovettori	5
4.1	Proiezione della condizione iniziale	5
5	Risposta libera e risposta forzata	7
6	Linearità e sovrapposizione degli effetti	8
7	Stazionarietà: l'istante iniziale non conta	8
8	L'esponenziale di matrice	9
8.1	Soluzione con ingresso	10
9	Esercizi	11
10	Soluzioni	13

1 Richiami di algebra lineare

Definizione – Autovalori e autovettori

$\lambda \in \mathbb{C}$ è un **autovalore** di $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se esiste un vettore $v \neq \mathbf{0}$ tale che $Av = \lambda v$, cioè $(A - \lambda I)v = \mathbf{0}$; v è un **autovettore** (destro) associato a λ . Gli autovalori sono le radici del **polinomio caratteristico** $p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$.

Osservazione – Controlli durante il calcolo

- Se λ è un autovalore, $A - \lambda I$ ha una **caduta di rango** ($\det(A - \lambda I) = 0$), quindi $(A - \lambda I)v = \mathbf{0}$ ha soluzioni non banali. Se dal calcolo esce solo il vettore nullo, c'è un errore di calcolo.
- Per una matrice 2×2 la caduta di rango rende **proporzionali** le due righe di $A - \lambda I$: basta usarne una.
- L'inversa esiste se e solo se il determinante è diverso da zero; dopo averla calcolata, si controlla che il prodotto con la matrice di partenza dia l'identità.

Esempio – Matrici con autovalori “a vista”

Per una matrice **diagonale** o **triangolare** gli autovalori sono gli elementi della diagonale; per una **triangolare a blocchi**, gli autovalori dei blocchi diagonali:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \implies \lambda_1 = 3, \quad \lambda_{2,3} = \text{autovalori di } \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Il blocco $\begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix}$ ha polinomio caratteristico $(\lambda - \alpha)^2 + \omega^2$ e autovalori $\alpha \pm j\omega$:
qui $2 \pm 2j$.

2 Cambio di coordinate e matrici simili

Proposizione – Rappresentazione nelle nuove coordinate

Con $z = Tx$ e $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertibile ($\det T \neq 0$):

$$\begin{cases} \dot{z} = \tilde{A}z + \tilde{B}u \\ y = \tilde{C}z + \tilde{D}u \end{cases} \quad \tilde{A} = TAT^{-1}, \quad \tilde{B} = TB, \quad \tilde{C} = CT^{-1}, \quad \tilde{D} = D.$$

È di nuovo un sistema lineare, stazionario, a tempo continuo, della stessa dimensione n , con le stesse u e y .

Dimostrazione

1. Si deriva $z = Tx$, con T costante: $\dot{z} = T\dot{x} = TAx + TBu$.
2. Si sostituisce $x = T^{-1}z$, nell'equazione di $\dot{z}$ e in $y = Cx + Du$:

$$\dot{z} = TAT^{-1}z + TBu, \quad y = CT^{-1}z + Du.$$

□

Definizione – Matrici simili

A e $\tilde{A}$ sono **simili** se esiste una matrice T invertibile tale che $\tilde{A} = TAT^{-1}$. Matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico, quindi gli stessi autovalori; se una è diagonalizzabile lo è anche l'altra.

È T che deve essere invertibile, non A : una matrice con un autovalore nullo non è invertibile, ma può essere simile a un'altra.

Le colonne di T^{-1} sono i vettori della nuova base: z_i è la coordinata di x lungo la i -esima colonna di T^{-1} .

2.1 Diagonalizzazione

Teorema – Diagonalizzabilità

- **Condizione.** $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è diagonalizzabile se e solo se, per ogni autovalore, la **molteplicità algebrica** è uguale alla **molteplicità geometrica**, cioè alla caduta di rango di $A - \lambda I$: $\dim \text{Ker}(A - \lambda I) = n - \text{rk}(A - \lambda I)$.
- **Caso semplice.** Se A ha n autovalori distinti, è diagonalizzabile.
- **Trasformazione.** Con v_i autovettore associato a λ_i ,

$$T^{-1} = (v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_n), \quad \tilde{A} = TAT^{-1} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Esempio – Massa-molla-smorzatore in coordinate diagonali

Con $M = 1$, $K = 4$, $b = 5$ (il caso senza oscillazioni del Capitolo 1):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = 0.$$

Autovalori e autovettori:

$$\lambda_1 = -4, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}; \quad \lambda_2 = -1, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Con $T^{-1} = (v_1 \ v_2)$ il sistema diventa

$$\dot{z}_1 = -4z_1 - \frac{1}{3}u, \quad \dot{z}_2 = -z_2 + \frac{1}{3}u, \quad y = z_1 + z_2.$$

I calcoli sono nell'Esercizio 1.

Osservazione

Nelle nuove coordinate z_1 e z_2 non sono più posizione e velocità: ciascuna è una combinazione di entrambe ($z = Tx$).

3 Il caso diagonale: prede e predatori

Proposizione – Equazione $\dot{x} = ax$

La soluzione di $\dot{x}(t) = ax(t)$ con condizione iniziale $x(t_0) = x_0$ è

$$x(t) = e^{a(t-t_0)} x_0 :$$

cresce se $a > 0$, tende a zero se $a < 0$, resta costante se $a = 0$.

Dimostrazione

x_0 è uno scalare costante e non conta nella derivazione:

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt} \left(e^{a(t-t_0)} \right) x_0 = a e^{a(t-t_0)} x_0 = a x(t),$$

e per $t = t_0$ si ha $x(t_0) = e^0 x_0 = x_0$. □

Con A già diagonale le equazioni sono di questo tipo, eventualmente con due ingressi:

$$\dot{x}_1 = a_1 x_1 + b_1 u_1, \quad \dot{x}_2 = a_2 x_2 + b_2 u_2.$$

Un esempio è un sistema **preda-predatore** in cui le popolazioni non interagiscono, con $u = 0$:

- x_1 , le **prede**: senza predatori e con cibo in abbondanza crescono, $a_1 > 0$;
- x_2 , i **predatori**: senza prede si estinguono, $a_2 < 0$, e tendono a zero asintoticamente.

Se le popolazioni interagiscono (modello di Volterra-Lotka), nelle equazioni compaiono termini in $x_1 x_2$ e il modello non è più lineare.

Definizione – Sistema positivo

Un sistema le cui variabili possono assumere solo valori positivi o nulli si dice **positivo**. Il sistema preda-predatore lo è: non esiste una popolazione di -5 predatori.

3.1 Autovalori, autovettori e traiettorie

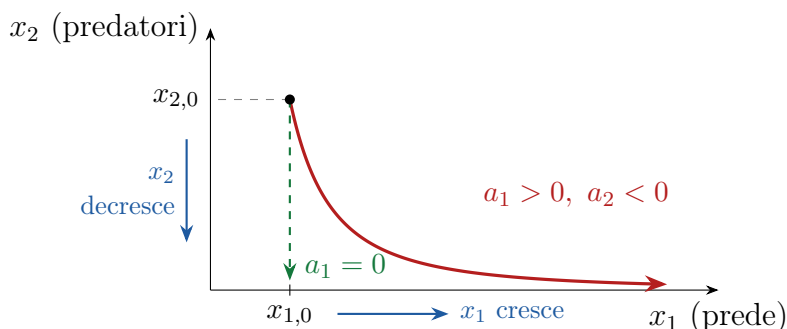
Per $A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$ gli autovalori sono a_1 e a_2 , con autovettori gli assi coordinati:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le variabili sono **disaccoppiate**. Partendo da $t_0 = 0$,

$$x(t) = \begin{pmatrix} e^{a_1 t} & 0 \\ 0 & e^{a_2 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \end{pmatrix}.$$

La **traiettoria** nel piano (x_1, x_2) combina i moti delle due componenti.



Sistema diagonale: la traiettoria (in rosso) va verso $x_2 = 0$ con x_1 che cresce. Con $a_1 = 0$ la prima componente resta ferma.

Osservazione – Che cosa conta davvero

Per disegnare la traiettoria basta sapere se gli autovalori sono a parte reale **positiva**, **negativa** o **nulla**. I valori decidono solo la *curvatura*: con a_2 molto negativo e a_1 poco positivo la curva scende quasi in verticale prima di piegare. Asintoticamente il comportamento non cambia: $x_2 \rightarrow 0$ e $x_1 \rightarrow \infty$.

4 Traiettorie nella base degli autovettori

Proposizione – Moto lungo gli autovettori

Se $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ è diagonalizzabile, con $u = 0$ e $z_0 = Tx_0$,

$$x(t) = T^{-1}z(t) = z_{1,0} e^{\lambda_1 t} v_1 + z_{2,0} e^{\lambda_2 t} v_2$$

Lungo ogni autovettore v_i la componente evolve da sola, con il proprio autovalore λ_i .

In generale gli autovettori *non* sono gli assi cartesiani. Per il massa-molla-smorzatore della Sezione 2 sono due direzioni del piano $(y, \dot{y})$, e il moto si legge lungo di esse:

$$x(t) = z_{1,0} e^{-4t} v_1 + z_{2,0} e^{-t} v_2.$$

Esercizio 2 ed Esercizio 3 ripetono il procedimento, dall'equazione differenziale alle traiettorie, per due equazioni del secondo ordine.

4.1 Proiezione della condizione iniziale

Le coordinate $z_{1,0}, z_{2,0}$ della condizione iniziale x_0 (posizione e velocità iniziali del carrello) si trovano **proiettando** x_0 lungo gli autovettori, che in generale non sono ortogonali:

- per x_0 si traccia la **parallela a** v_2 fino alla retta di v_1 : si legge $z_{1,0}v_1$;

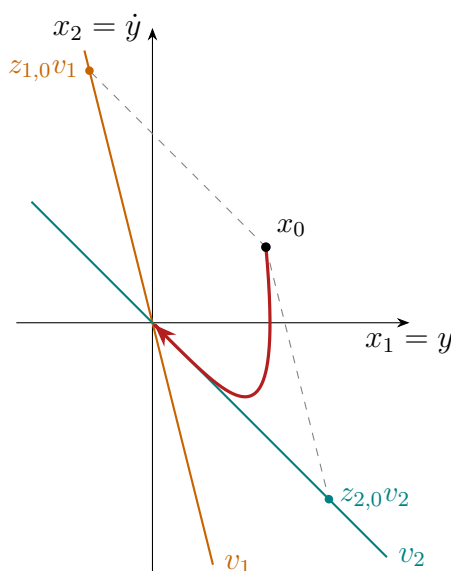
- per x_0 si traccia la **parallela a** v_1 fino alla retta di v_2 : si legge $z_{2,0}v_2$.

Numericamente $x_0 = z_{1,0}v_1 + z_{2,0}v_2 = T^{-1}z_0$, quindi $z_0 = Tx_0$: si risolve un sistema lineare, cioè si inverte la matrice che ha per colonne gli autovettori.

Esempio – Una condizione iniziale

Con $T = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ (Esercizio 1):

$$x_0 = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 1 \end{pmatrix} \implies z_0 = Tx_0 = \begin{pmatrix} -5/6 \\ 7/3 \end{pmatrix}, \quad -\frac{5}{6}v_1 + \frac{7}{3}v_2 = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



Rette degli autovettori v_1 e v_2 , proiezioni di x_0 parallele agli autovettori e traiettoria (in rosso), che converge all'origine tangente a v_2 .

Osservazione – Forma della traiettoria

- Lungo v_1 e lungo v_2 la componente converge all'origine, perché $\lambda_1 = -4 < 0$ e $\lambda_2 = -1 < 0$: la traiettoria va all'**origine** senza oscillare.
- λ_1 è molto più negativo di λ_2 , quindi la componente lungo v_1 si esaurisce prima: la traiettoria si appiattisce sulla direzione di v_2 e arriva all'origine lungo di essa. Il percorso preciso dipende anche dalla condizione iniziale.

5 Risposta libera e risposta forzata

Definizione – Risposta libera e risposta forzata

Per $\dot{x} = ax + bu$ con $x(t_0) = x_0$:

- la **risposta** (o evoluzione) **libera** $x_L(t)$ è la soluzione con $u = 0$: il comportamento dovuto solo alla condizione iniziale x_0 ;
- la **risposta forzata** $x_F(t)$ è la soluzione con condizione iniziale nulla, $x_0 = 0$: dipende dall'ingresso applicato sull'intervallo $[t_0, t]$.

Per $u \neq 0$ l'equazione è **non omogenea**; l'ingresso u , il controllo, si chiama anche **forzamento**.

Teorema – Soluzione dell'equazione scalare

La soluzione di $\dot{x} = ax + bu$ con $x(t_0) = x_0$ è $x(t) = x_L(t) + x_F(t)$, con

$$x_L(t) = e^{a(t-t_0)} x_0, \quad x_F(t) = \int_{t_0}^t e^{a(t-\tau)} b u(\tau) d\tau$$

e l'uscita è $y(t) = cx(t) + du(t)$. Per $u = 0$ resta $x(t) = e^{a(t-t_0)}x_0$, la soluzione di $\dot{x} = ax$ della Sezione 3.

Dimostrazione

Nel termine integrale il tempo compare due volte, nell'estremo superiore e nell'integranda $e^{a(t-\tau)}$: la derivata dà due contributi,

$$\frac{d}{dt} \int_{t_0}^t f(t, \tau) d\tau = f(t, t) + \int_{t_0}^t \frac{\partial f(t, \tau)}{\partial t} d\tau.$$

Quindi

$$\dot{x}(t) = a e^{a(t-t_0)} x_0 + \underbrace{e^0 b u(t)}_{f(t,t)} + \int_{t_0}^t a e^{a(t-\tau)} b u(\tau) d\tau = a x(t) + b u(t),$$

e per $t = t_0$ l'integrale è nullo, quindi $x(t_0) = x_0$. □

6 Linearità e sovrapposizione degli effetti

Proposizione – Sovrapposizione degli effetti

Con lo stesso istante iniziale t_0 , combinando due esperimenti con **gli stessi coefficienti** c_1, c_2 per condizione iniziale e ingresso:

	esperimento 1	esperimento 2	combinazione
condizione iniziale	$x_{1,0}$	$x_{2,0}$	$c_1 x_{1,0} + c_2 x_{2,0}$
ingresso	u_1	u_2	$c_1 u_1 + c_2 u_2$
stato in t	$x_1(t)$	$x_2(t)$	$c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$

Il sistema è lineare *rispetto alla coppia* condizione iniziale e ingresso: per questo i coefficienti devono essere gli stessi. Con $u_1 = 0$ (esperimento 1 libero), $x_{2,0} = 0$ (esperimento 2 forzato) e $c_1 = c_2 = 1$ la combinazione parte da $x_{1,0}$ con ingresso u_2 , e si ritrova $x(t) = x_L(t) + x_F(t)$.

7 Stazionarietà: l'istante iniziale non conta

Proposizione – Invarianza per traslazione

In un sistema stazionario si confrontino due esperimenti con la stessa condizione iniziale x_0 :

- il primo inizia in t_0 con ingresso $u(t)$;
- il secondo inizia in $t_1 = t_0 + \Delta$ con l'ingresso traslato $\bar{u}(t) = u(t - \Delta)$.

Allora $\bar{x}(t + \Delta) = x(t)$: conta il tempo trascorso $t - t_0$, non l'istante di inizio. Per questo si può sempre porre $t_0 = 0$.

Dimostrazione

Nel caso scalare, con il cambio di variabile $\sigma = \tau - \Delta$,

$$\begin{aligned}\bar{x}(t + \Delta) &= e^{a(t+\Delta-t_1)} x_0 + \int_{t_1}^{t+\Delta} e^{a(t+\Delta-\tau)} b u(\tau - \Delta) d\tau \\ &= e^{a(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t e^{a(t-\sigma)} b u(\sigma) d\sigma = x(t).\end{aligned}$$

□

8 L'esponenziale di matrice

Definizione – Esponenziale di matrice

Per $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, per analogia con lo sviluppo in serie dell'esponenziale,

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \frac{A^3 t^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}.$$

Proposizione – Derivata dell'esponenziale

$$\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At} = e^{At} A.$$

Dimostrazione

Si deriva la serie termine a termine: l'identità ha derivata nulla, At ha derivata A , $A^2 t^2/2$ ha derivata $A^2 t$, $A^3 t^3/3!$ ha derivata $A^3 t^2/2$, e così via:

$$\frac{d}{dt} e^{At} = A + A^2 t + \frac{A^3 t^2}{2!} + \cdots = A \left(I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \cdots \right) = A e^{At}.$$

Mettendo in evidenza A a destra si ottiene $e^{At} A$. In generale le matrici non commutano; A ed e^{At} invece sì, perché e^{At} è costruita con le potenze di A . $\square$

Teorema – Soluzione del sistema omogeneo

La soluzione di $\dot{x} = Ax$ con $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ è

$$x(t) = e^{At} x_0;$$

con istante iniziale generico, $x(t) = e^{A(t-t_0)} x(t_0)$. Per $n = 1$ è la formula scalare.

Dimostrazione

x_0 è un vettore costante e si porta fuori dalla derivata:

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt} (e^{At}) x_0 = A e^{At} x_0 = A x(t),$$

e $x(0) = e^{A \cdot 0} x_0 = I x_0 = x_0$. $\square$

Osservazione – Il caso diagonale

Se $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, ogni potenza A^k è diagonale con elementi λ_i^k , e la serie si somma elemento per elemento:

$$e^{At} = \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}),$$

la matrice del sistema preda-predatore (Sezione 3).

8.1 Soluzione con ingresso

Teorema – Soluzione dell'equazione di stato

La soluzione di $\dot{x} = Ax + Bu$ con $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ è

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

Noti x_0 e l'ingresso su $[t_0, t]$, dà lo stato in ogni istante $t \geq t_0$. Come nel caso scalare, il primo termine è la risposta libera e il secondo la forzata; per $n = 1$ è il teorema della Sezione 5.

Dimostrazione

1. Il primo termine ha derivata $A e^{A(t-t_0)} x_0$: x_0 è costante.
2. Nell'integrale t compare nell'estremo superiore e nell'integranda. Con la regola della Sezione 5 e $e^{A \cdot 0} = I$:

$$\frac{d}{dt} \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau = B u(t) + \int_{t_0}^t A e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau.$$

3. A sta a sinistra nei due termini che la contengono e si mette in evidenza:

$$\dot{x}(t) = A \left(e^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau \right) + B u(t) = A x(t) + B u(t).$$

4. Per $t = t_0$ l'integrale è nullo e $e^{A \cdot 0} = I$, quindi $x(t_0) = x_0$.

□

Osservazione – Dallo scalare alle matrici

La formula si ricorda partendo da quella scalare e sostituendo a, b con A, B , ma l'ordine dei fattori non si cambia: $e^{A(t-\tau)} B u(\tau)$, non $B e^{A(t-\tau)} u(\tau)$, e nella dimostrazione A si raccoglie a sinistra. Nel caso scalare l'ordine è indifferente, fra matrici no.

Riepilogo

- **Autovettore:** $(A - \lambda I)v = 0$ con $v \neq 0$, possibile perché $A - \lambda I$ ha una caduta di rango.
- **Cambio di coordinate** $z = Tx$: $\tilde{A} = TAT^{-1}$, $\tilde{B} = TB$, $\tilde{C} = CT^{-1}$, $\tilde{D} = D$; A e $\tilde{A}$ sono simili, con gli stessi autovalori.
- **Diagonalizzabile** $\iff$ molteplicità algebrica = geometrica; $T^{-1} = (v_1 \cdots v_n)$.
- **Traiettorie:** $x(t) = z_{1,0}e^{\lambda_1 t}v_1 + z_{2,0}e^{\lambda_2 t}v_2$, $z_0 = Tx_0$; contano segno degli autovalori e direzione degli autovettori.
- **Libera + forzata:** $x(t) = e^{a(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau) d\tau$; con $u = 0$ cresce se $a > 0$, decresce se $a < 0$, è costante se $a = 0$.
- **Sovrapposizione e stazionarietà:** stessi coefficienti per condizione iniziale e ingresso; conta $t - t_0$, si pone $t_0 = 0$.
- **Esponenziale di matrice:** $e^{At} = \sum_k A^k t^k / k!$, $\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At} = e^{At}A$.
- **Soluzione con ingresso:** $x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau) d\tau$; con $u = 0$ resta $e^{A(t-t_0)}x_0$.

9 Esercizi

Esercizio 1 – Forma diagonale del massa-molla-smorzatore

Per il massa-molla-smorzatore con $M = 1$, $K = 4$, $b = 5$,

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u, \quad y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x,$$

trovare la trasformazione T che rende diagonale $\tilde{A}$ e le matrici $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{C}$, $\tilde{D}$.

Soluzione a pagina 14 $\rightarrow$

Esercizio 2 – Appello del 04/02/2025, Prof.ssa Claudia Califano e Prof. Paolo Di Giamberardino, esercizio 3, adattato

Dato un processo descritto dall'equazione differenziale del secondo ordine

$$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 3y(t) = u(t),$$

determinare una rappresentazione con lo spazio di stato associata al processo in cui $y(t)$ e $u(t)$ rappresentino rispettivamente l'uscita e l'ingresso del sistema. Studiare inoltre l'evoluzione libera lungo gli autovettori, tracciando i grafici che ne rappresen-

tano il comportamento nel piano cartesiano, per generiche condizioni iniziali $y(0) = a$ e $\dot{y}(0) = b$ al variare di a e b .

Soluzione a pagina 15 →

Esercizio 3 – Appello del 15/06/2022, Prof.ssa Claudia Califano e Prof. Paolo Di Giamberardino, esercizio 3, adattato

Dato un processo descritto dall'equazione differenziale del secondo ordine

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = u(t),$$

determinare una rappresentazione con lo spazio di stato associata al processo in cui $y(t)$ e $u(t)$ rappresentino rispettivamente l'uscita e l'ingresso del sistema. Studiare inoltre l'evoluzione libera lungo gli autovettori, tracciando i grafici che ne rappresentano il comportamento nel piano cartesiano, per generiche condizioni iniziali $y(0) = a$ e $\dot{y}(0) = b$ al variare di a e b .

Soluzione a pagina 16 →

10 Soluzioni

Soluzione dell'Esercizio 1 – Forma diagonale del massa-molla-smorzatore

Autovalori. A è in forma compagna: il polinomio caratteristico si legge dall'ultima riga,

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^2 + 5\lambda + 4,$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{-5 \pm 3}{2} \implies \lambda_1 = -4, \quad \lambda_2 = -1.$$

Sono reali e distinti: A è diagonalizzabile.

Autovettore per $\lambda_1 = -4$. Con componenti a, b :

$$(A + 4I)v = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Le righe sono proporzionali: basta $4a + b = 0$. Con $a = 1$ si ha $b = -4$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Autovettore per $\lambda_2 = -1$.

$$(A + I)v = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \mathbf{0} \implies a + b = 0 \implies v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Trasformazione. Gli autovettori sono le colonne di T^{-1} :

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}, \quad \det T^{-1} = -1 + 4 = 3, \quad T = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Verifica: $TT^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1+4 & -1+1 \\ 4-4 & 4-1 \end{pmatrix} = I.$

Nuove matrici.

$$AT^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 16 & 1 \end{pmatrix}, \quad T(AT^{-1}) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4-16 & 1-1 \\ -16+16 & -4+1 \end{pmatrix},$$

quindi

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = TB = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{C} = CT^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{D} = D = 0.$$

In definitiva:

$$\dot{z}_1 = -4z_1 - \frac{1}{3}u, \quad \dot{z}_2 = -z_2 + \frac{1}{3}u, \quad y = z_1 + z_2.$$

[← Torna all'Esercizio 1, pagina 11](#)

Soluzione dell'Esercizio 2 – Appello del 04/02/2025, Prof.ssa Claudia Califano e Prof. Paolo Di Giamberardino, esercizio 3, adattato

Rappresentazione. Con $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$ (forma compagna):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = 0, \quad x_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Autovalori. Dall'ultima riga, $\det(\lambda I - A) = \lambda^2 + 4\lambda + 3 = (\lambda + 1)(\lambda + 3)$: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -3$, reali e distinti, quindi A è diagonalizzabile.

Autovettori, con componenti p , q .

- $\lambda_1 = -1$: $(A + I)v = \mathbf{0}$ dà $p + q = 0$, quindi $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$;
- $\lambda_2 = -3$: $(A + 3I)v = \mathbf{0}$ dà $3p + q = 0$, quindi $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Trasformazione.

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad \det T^{-1} = -2, \quad T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Verifica: $TT^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3-1 & 3-3 \\ -1+1 & -1+3 \end{pmatrix} = I$.

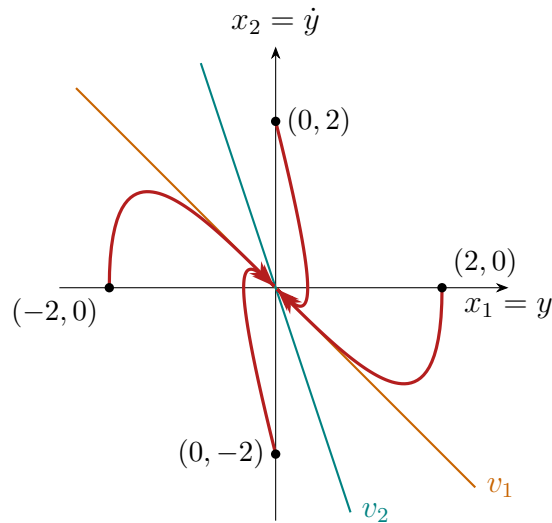
Evoluzione libera. Con $u = 0$, $z_0 = Tx_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3a+b \\ -(a+b) \end{pmatrix}$ e

$$x(t) = \frac{3a+b}{2} e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{a+b}{2} e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad y(t) = \frac{3a+b}{2} e^{-t} - \frac{a+b}{2} e^{-3t}.$$

Controllo: $y(0) = a$ e $\dot{y}(0) = -\frac{3a+b}{2} + \frac{3(a+b)}{2} = b$.

Al variare di a e b .

- $a = b = 0$: il sistema resta nell'origine.
- $b = -a$ (x_0 sulla retta di v_1): $z_{2,0} = 0$, il moto resta sulla retta di v_1 e va all'origine come e^{-t} .
- $b = -3a$ (x_0 sulla retta di v_2): $z_{1,0} = 0$, il moto resta sulla retta di v_2 e va all'origine come e^{-3t} .
- Negli altri casi le due componenti tendono a zero senza oscillare; quella lungo v_2 si esaurisce prima, e la traiettoria arriva all'origine tangente a v_1 .



[← Torna all'Esercizio 2, pagina 11](#)

Soluzione dell'Esercizio 3 – Appello del 15/06/2022, Prof.ssa Claudia Califano e Prof. Paolo Di Giamberardino, esercizio 3, adattato

Rappresentazione. Con $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = 0, \quad x_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Autovalori. $\det(\lambda I - A) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$, reali e distinti.

Autovettori, con componenti p , q .

- $\lambda_1 = -1$: $(A + I)v = \mathbf{0}$ dà $p + q = 0$, quindi $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$;
- $\lambda_2 = -2$: $(A + 2I)v = \mathbf{0}$ dà $2p + q = 0$, quindi $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Trasformazione.

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \det T^{-1} = -1, \quad T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Verifica: $TT^{-1} = \begin{pmatrix} 2-1 & 2-2 \\ -1+1 & -1+2 \end{pmatrix} = I$.

Evoluzione libera. Con $u = 0$, $z_0 = Tx_0 = \begin{pmatrix} 2a+b \\ -(a+b) \end{pmatrix}$ e

$$x(t) = (2a+b)e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - (a+b)e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad y(t) = (2a+b)e^{-t} - (a+b)e^{-2t}.$$

Controllo: $y(0) = a$ e $\dot{y}(0) = -(2a+b) + 2(a+b) = b$.

Al variare di a e b .

- $a = b = 0$: il sistema resta nell'origine.
- $b = -a$ (x_0 sulla retta di v_1): il moto resta su quella retta e va all'origine come e^{-t} .
- $b = -2a$ (x_0 sulla retta di v_2): il moto resta su quella retta e va all'origine come e^{-2t} .
- Negli altri casi la traiettoria va all'origine senza oscillare e vi arriva tangente a v_1 , perché la componente lungo v_2 si esaurisce prima.

Il grafico ha la stessa forma di quello dell'Esercizio 2, con la retta di v_2 di pendenza -2 invece di -3 .

← Torna all'Esercizio 3, pagina 12