

Appunti di Sistemi Dinamici

Canale 2 · Prof.ssa Claudia Califano

Capitolo 3: Rappresentazione esplicita e risposte impulsive

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dalle lezioni in aula e dal materiale del corso

Argomenti: Rappresentazione esplicita · Matrici Φ , H , Ψ , W
Dalla forma esplicita alla forma implicita · Proprietà di composizione
Evoluzione libera e forzata · Risposte impulsive · Integrale di convoluzione
Cambio di coordinate · Problema diretto e problema inverso
Ingressi canonici · Risposta al gradino di un sistema del primo ordine

Indice

1	La rappresentazione esplicita	1
1.1	Dalla forma esplicita alla forma implicita	2
2	Evoluzione libera ed evoluzione forzata	3
3	Le risposte impulsive	4
3.1	Cambio di coordinate	5
4	Ingressi elementari e risposta al gradino	5
5	Esercizi	8
6	Soluzioni	10

1 La rappresentazione esplicita

Definizione – Matrici della rappresentazione esplicita

Per il sistema $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx + Du$ con n stati, m ingressi e p uscite si definiscono la **matrice di transizione** Φ , la **matrice delle risposte impulsive nello stato** H , la **matrice di trasformazione dell'uscita** Ψ e la **matrice delle risposte impulsive in uscita** W :

$$\Phi(t) = e^{At} \quad (n \times n)$$

$$H(t) = e^{At} B \quad (n \times m)$$

$$\Psi(t) = Ce^{At} \quad (p \times n)$$

$$W(t) = Ce^{At} B + D \delta(t) \quad (p \times m)$$

dove $\delta(t)$ è l'**impulso** di Dirac.

Nota – Impulso di Dirac

L'impulso centrato in t_1 , $\delta(\tau - t_1)$, si scrive anche $\delta(t_1 - \tau)$. È nullo per $\tau \neq t_1$, e l'integrale di una funzione per l'impulso dà il valore della funzione in t_1 : per $t_1 \in [t_0, t]$,

$$\int_{t_0}^t f(\tau) \delta(\tau - t_1) d\tau = f(t_1).$$

Teorema – Rappresentazione esplicita

Con condizione iniziale $x(t_0) = x_0$ e ingresso u su $[t_0, t]$:

$$\begin{aligned} x(t) &= \Phi(t - t_0) x_0 + \int_{t_0}^t H(t - \tau) u(\tau) d\tau \\ y(t) &= \Psi(t - t_0) x_0 + \int_{t_0}^t W(t - \tau) u(\tau) d\tau \end{aligned}$$

È la **rappresentazione esplicita** del sistema: dà stato e uscita come funzioni del tempo, noti lo stato iniziale e l'ingresso.

Dimostrazione

1. La prima riga è la soluzione dell'equazione di stato (Capitolo 2), scritta con Φ e H .
2. Sostituendola in $y = Cx + Du$:

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau) d\tau + Du(t).$$

3. Per la proprietà dell'impulso con $t_1 = t$, $Du(t) = \int_{t_0}^t D\delta(t-\tau)u(\tau) d\tau$. Gli integrali hanno gli stessi estremi e si sommano: l'integranda diventa $W(t-\tau)u(\tau)$.

□

Il modello $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx + Du$ è la rappresentazione *implicita* (Capitolo 1): dà il legame differenziale, con matrici costanti. Quella esplicita dà le soluzioni, con matrici funzioni del tempo, ma per calcolarle servono e^{At} e un integrale per ogni ingresso, sempre più pesanti al crescere di n (Esercizio 5).

Le matrici dipendono solo dal tempo trascorso, $t - t_0$ e $t - \tau$: per la stazionarietà (Capitolo 2) da qui in poi $t_0 = 0$.

1.1 Dalla forma esplicita alla forma implicita

Proposizione – Matrici della forma implicita

Dalle matrici della rappresentazione esplicita si ricavano quelle della forma implicita:

$$A = \dot{\Phi}(0), \quad B = H(0), \quad C = \Psi(0),$$

dove $\dot{\Phi}(0)$ è la derivata di Φ in $t = 0$; D è il coefficiente dell'impulso in W :

$$W(t) = CH(t) + D\delta(t).$$

Dimostrazione

1. $\dot{\Phi}(t) = Ae^{At}$ (Capitolo 2) ed $e^{A \cdot 0} = I$, quindi $\dot{\Phi}(0) = A$.
2. $H(0) = e^{A \cdot 0}B = B$ e $\Psi(0) = Ce^{A \cdot 0} = C$.
3. In $W(t) = Ce^{At}B + D\delta(t)$ il primo termine è la funzione $CH(t)$; l'impulso compare solo nel secondo, con coefficiente D .

□

Proposizione – Proprietà di composizione

Con t_1 intermedio, $t_0 \leq t_1 \leq t$ per Φ e $\tau \leq t_1 \leq t$ per H :

$$\Phi(0) = I, \quad \Phi(t - t_0) = \Phi(t - t_1) \Phi(t_1 - t_0), \quad H(t - \tau) = \Phi(t - t_1) H(t_1 - \tau).$$

Andare da t_0 a t equivale ad andare da t_0 all'istante intermedio t_1 e da lì a t ; lo stesso vale per l'effetto sullo stato di un impulso applicato in τ .

Dimostrazione

1. $\Phi(0) = e^{A \cdot 0} = I$.
2. Con $s = t - t_1$ e $r = t_1 - t_0$ si moltiplicano le due serie e si raccolgono i termini con la stessa potenza A^k ; per il binomio di Newton

$$e^{As} e^{Ar} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \sum_{i+l=k} \frac{s^i r^l}{i! l!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k (s+r)^k}{k!} = e^{A(s+r)},$$

e $s + r = t - t_0$.

3. $H(t - \tau) = \Phi(t - \tau) B = \Phi(t - t_1) \Phi(t_1 - \tau) B = \Phi(t - t_1) H(t_1 - \tau)$.

□

L'Esercizio 6 usa le due proposizioni per ricostruire la forma implicita da quella esplicita, verificando le equazioni.

2 Evoluzione libera ed evoluzione forzata

Proposizione – Struttura della risposta

Stato e uscita sono la somma di due evoluzioni: la **libera**, con ingresso nullo, e la **forzata**, con stato iniziale nullo:

	libera ($u = 0$)	forzata ($x_0 = 0$)
stato	$x_L(t) = \Phi(t) x_0$	$x_F(t) = \int_0^t H(t - \tau) u(\tau) d\tau$
uscita	$y_L(t) = \Psi(t) x_0$	$y_F(t) = \int_0^t W(t - \tau) u(\tau) d\tau$

con $x = x_L + x_F$ e $y = y_L + y_F$.

È la divisione del caso scalare (Capitolo 2), ora per stato e uscita di dimensione qualsiasi. La libera è lineare nello stato iniziale, un prodotto matrice per vettore; la forzata è lineare

nell'ingresso, perché l'integrale di una combinazione di ingressi è la combinazione degli integrali. Così si separa l'effetto dell'inizializzazione da quello dell'ingresso.

3 Le risposte impulsive

Proposizione – Colonne di H e W

Con stato iniziale nullo si applichi un impulso sul solo ingresso i : $u(t) = e_i \delta(t)$, con e_i l' i -esimo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^m$. Allora

$$x_F(t) = H(t) e_i, \quad y_F(t) = W(t) e_i :$$

la risposta forzata è la colonna i di H nello stato e la colonna i di W in uscita.

Dimostrazione

Per la proprietà dell'impulso con $t_1 = 0$, $\int_0^t W(t - \tau) e_i \delta(\tau) d\tau = W(t) e_i$; allo stesso modo per H . □

Definizione – Integrale di convoluzione

La risposta forzata in uscita

$$y_F(t) = \int_0^t W(t - \tau) u(\tau) d\tau = \int_0^t W(\sigma) u(t - \sigma) d\sigma$$

è l'**integrale di convoluzione** di W con l'ingresso; W ne è il **nucleo**.

Osservazione – W come modello del comportamento forzato

- Nota W , la convoluzione dà la risposta forzata in uscita a *ogni* ingresso: W descrive tutto il comportamento forzato fra ingresso e uscita.
- W è essa stessa una risposta: quella agli impulsi, a partire dallo stato nullo.
- Lo stato iniziale spesso non si conosce, per esempio dopo una perturbazione. Se l'evoluzione libera si estingue, dopo un transitorio resta solo la forzata, e il comportamento del sistema si legge da W .

Definizione – Problema diretto e problema inverso

- **Problema diretto**: noti il sistema e l'ingresso, calcolare l'uscita.
- **Problema inverso**: noti gli ingressi applicati e le uscite misurate, ricostruire il modello del sistema. È l'**identificazione** della scatola nera del Capitolo 1.

Poiché W è la risposta agli impulsi, in linea di principio bastano m esperimenti per avere il modello del comportamento forzato: dallo stato nullo si applica un impulso sull'ingresso i e la risposta misurata è la colonna i di W . In pratica un impulso non si realizza, e si usano altri esperimenti ingresso-uscita.

3.1 Cambio di coordinate

Proposizione – Matrici nelle nuove coordinate

Con $z = Tx$ e T invertibile:

$$\tilde{\Phi}(t) = T \Phi(t) T^{-1}, \quad \tilde{H}(t) = T H(t), \quad \tilde{\Psi}(t) = \Psi(t) T^{-1}, \quad \tilde{W}(t) = W(t).$$

La risposta impulsiva in uscita non dipende dalle coordinate: come gli autovalori, è una proprietà del sistema e non della sua rappresentazione.

La dimostrazione è l'Esercizio 3. H invece cambia, perché dipende dalla scelta dello stato; u e y restano gli stessi.

4 Ingressi elementari e risposta al gradino

Definizione – Ingressi elementari

Si chiamano anche **ingressi canonici**.

- **Polinomiali**: l'impulso $\delta(t)$ e le funzioni

$$\delta_{-k}(t) = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \delta_{-1}(t), \quad k = 1, 2, \dots :$$

il **gradino unitario** $\delta_{-1}(t)$, uguale a 1 per $t \geq 0$ e a 0 prima, la **rampa** $\delta_{-2}(t) = t \delta_{-1}(t)$, la parabola $\delta_{-3}(t) = \frac{t^2}{2} \delta_{-1}(t)$.

- **Sinusoidali**, per i segnali periodici.

La risposta forzata al gradino unitario si chiama **risposta indiciale**.

Ogni δ_{-k} è l'integrale della precedente, a partire dall'impulso: $\delta_{-k}(t) = \int_0^t \delta_{-(k-1)}(\tau) d\tau$, con $\delta_0 = \delta$: l'indice negativo conta le integrazioni.

Un segnale generico, come una voce, si scompone in segnali di queste due classi; per la linearità, la risposta a questi dice come il sistema risponde in generale.

Se l'evoluzione libera si estingue, dopo un transitorio l'uscita ha la forma dell'ingresso:

Ingresso	Uscita dopo il transitorio
gradino	gradino, di ampiezza in generale diversa
rampa	rampa più gradino
sinusoide	sinusoide della stessa frequenza, con ampiezza e fase diverse

Proposizione – Risposta indiciale del sistema scalare

Per $\dot{x} = ax + bu$ con $a < 0$ e $u = \delta_{-1}$:

$$x_F(t) = -\frac{b}{a}(1 - e^{at}), \quad t \geq 0.$$

Parte da zero e si assesta sul valore costante $-b/a$, con la rapidità con cui e^{at} va a zero.

Dimostrazione

Con $u(\tau) = 1$ per $\tau \geq 0$:

$$x_F(t) = \int_0^t e^{a(t-\tau)} b \, d\tau = b \left[-\frac{e^{a(t-\tau)}}{a} \right]_{\tau=0}^{\tau=t} = -\frac{b}{a}(1 - e^{at}).$$

□

Esempio – Un sistema del primo ordine

$\dot{x} = -2x + u$, $y = x$, $x_0 = 1$, $u = \delta_{-1}$. Qui Φ , H , Ψ e W sono tutte e^{-2t} ($B = C = 1$, $D = 0$), quindi

$$x_L(t) = e^{-2t}, \quad x_F(t) = \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}), \quad y(t) = x(t) = \frac{1}{2}(1 + e^{-2t}).$$

La libera va a zero, la forzata parte da zero e si assesta su $\frac{1}{2}$, la somma scende da $x_0 = 1$ a $\frac{1}{2}$ (Figura 1).

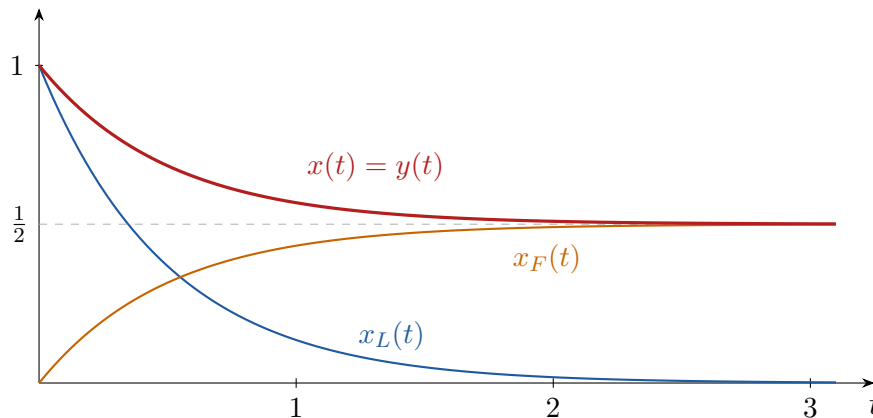


Figura 1: Risposta di $\dot{x} = -2x + u$ con $x_0 = 1$ al gradino unitario: evoluzione libera (blu), forzata (arancione) e complessiva (rossa), che si assesta su $\frac{1}{2}$.

Osservazione – L'autovalore e l'assestamento

- $a = -2$ è l'autovalore del sistema. Con $a = -10$ o $a = -100$ l'evoluzione libera si estingue più in fretta.
- Lo stesso autovalore dice quanto in fretta la forzata si assesta. Cambia anche il valore finale $-b/a$: con $a = -10$ e $b = 1$ la forzata si assesta su $\frac{1}{10}$.
- Nella forzata $x_F = -\frac{b}{a} + \frac{b}{a}e^{at}$ il termine e^{at} viene dall'autovalore, come nella libera; il gradino $-\frac{b}{a}$ viene dall'ingresso, anch'esso un gradino. Dopo il transitorio resta solo il termine dell'ingresso: contano il valore su cui la risposta si assesta, il tempo che impiega e l'andamento, con o senza oscillazioni.

L'Esercizio 2 ripete il calcolo con un gradino e con una rampa.

Riepilogo

- **Matrici:** $\Phi = e^{At}$, $H = e^{At}B$, $\Psi = Ce^{At}$, $W = Ce^{At}B + D\delta$.
- **Forma esplicita:** $y(t) = \Psi(t)x_0 + \int_0^t W(t-\tau)u(\tau) d\tau$; per lo stato Φ e H .
- **Forma implicita dalla esplicita:** $A = \dot{\Phi}(0)$, $B = H(0)$, $C = \Psi(0)$, D coefficiente di δ in W ; $\Phi(t-t_0) = \Phi(t-t_1)\Phi(t_1-t_0)$.
- **Libera e forzata:** la libera ($u = 0$) è lineare in x_0 , la forzata ($x_0 = 0$) in u .
- **Risposte impulsive:** la colonna i di H (di W) è la risposta forzata dello stato (dell'uscita) a un impulso sull'ingresso i .
- **Convoluzione:** y_F è la convoluzione di W con u ; W è il nucleo e il modello del comportamento forzato, da ricavare con esperimenti (problema inverso).
- **Coordinate:** $\tilde{\Phi} = T\Phi T^{-1}$, $\tilde{H} = TH$, $\tilde{\Psi} = \Psi T^{-1}$, $\tilde{W} = W$.
- **Ingressi canonici e gradino:** $\delta_{-k} = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\delta_{-1}$; per $n = 1$ e $a < 0$ la risposta al gradino $x_F = -\frac{b}{a}(1 - e^{at})$ si assesta su $-b/a$.

5 Esercizi

Esercizio 1 – Dimensioni delle matrici

Per un sistema con $n = 3$ stati, $m = 2$ ingressi e $p = 1$ uscita, scrivere le dimensioni di A , B , C , D e di $\Phi(t)$, $H(t)$, $\Psi(t)$, $W(t)$.

Soluzione a pagina 10 →

Esercizio 2 – Gradino e rampa per un sistema del primo ordine

Dato il sistema $\dot{x} = -x + 2u$, $y = x$, con $x(0) = 3$:

- (a) con $u(t) = \delta_{-1}(t)$, calcolare evoluzione libera, forzata e risposta complessiva in uscita, e il valore su cui l'uscita si assesta;
- (b) con la rampa $u(t) = t\delta_{-1}(t)$, calcolare la risposta forzata in uscita e descriverne l'andamento dopo il transitorio.

Soluzione a pagina 10 →

Esercizio 3 – Risposte impulsive nelle nuove coordinate

Con $z = Tx$ e T invertibile, dimostrare che $\tilde{\Phi}(t) = T\Phi(t)T^{-1}$, $\tilde{H}(t) = TH(t)$, $\tilde{\Psi}(t) = \Psi(t)T^{-1}$ e $\tilde{W}(t) = W(t)$.

Soluzione a pagina 11 →

Esercizio 4 – Esonero 2024, Canale 2, Prof.ssa Claudia Califano, esercizio 3

Indicare le relazioni che permettono di passare dalla rappresentazione implicita alla rappresentazione esplicita nei sistemi a tempo continuo.

Soluzione a pagina 11 →

Esercizio 5 – Appello del 03/02/2020, Prof.ssa Claudia Califano e Prof. Paolo Di Giamberardino, esercizio 4, adattato

Un sistema dinamico può essere rappresentato tramite un modello implicito o esplicito. Illustrare i diversi vantaggi e svantaggi delle due rappresentazioni.

Soluzione a pagina 12 →

Esercizio 6 – Appello del 08/06/2020, Prof.ssa Claudia Califano e Prof. Paolo Di Giamberardino, esercizio 4

Dimostrare (con tutti i passaggi) come si passa dal modello esplicito al modello implicito di un sistema a tempo continuo.

Soluzione a pagina 12 →

6 Soluzioni

Soluzione dell'Esercizio 1 – Dimensioni delle matrici

Le righe vengono dal vettore che la matrice produce, le colonne da quello che moltiplica (Capitolo 1); la condizione iniziale x_0 ha la dimensione di x :

Matrice	Moltiplica	Produce	Dimensione
A, Φ	$x \in \mathbb{R}^3$	$\dot{x}, x \in \mathbb{R}^3$	3×3
B, H	$u \in \mathbb{R}^2$	$\dot{x}, x \in \mathbb{R}^3$	3×2
C, Ψ	$x \in \mathbb{R}^3$	$y \in \mathbb{R}$	1×3
D, W	$u \in \mathbb{R}^2$	$y \in \mathbb{R}$	1×2

Φ ha le dimensioni di A , H di B , Ψ di C e W di D : per esempio W moltiplica u e dà un contributo a y .

[← Torna all'Esercizio 1, pagina 8](#)

Soluzione dell'Esercizio 2 – Gradino e rampa per un sistema del primo ordine

Con $a = -1$, $b = 2$, $c = 1$, $d = 0$: $\Phi(t) = \Psi(t) = e^{-t}$ e $H(t) = W(t) = 2e^{-t}$.

(a) Evoluzione libera: $y_L(t) = \Psi(t) x_0 = 3e^{-t}$. Forzata, dalla risposta indiciale del sistema scalare con $-b/a = 2$:

$$y_F(t) = 2(1 - e^{-t}).$$

Complessiva: $y(t) = 3e^{-t} + 2 - 2e^{-t} = 2 + e^{-t}$. Parte da $y(0) = 3$ e si assesta su 2: l'autovalore -1 è negativo e la libera si estingue.

(b) Con $u(\tau) = \tau$:

$$y_F(t) = \int_0^t 2e^{-(t-\tau)} \tau d\tau = 2e^{-t} \int_0^t \tau e^{\tau} d\tau.$$

Per parti, $\int_0^t \tau e^{\tau} d\tau = [(\tau - 1)e^{\tau}]_0^t = (t - 1)e^t + 1$, quindi

$$y_F(t) = 2(t - 1 + e^{-t}) = 2t - 2 + 2e^{-t}.$$

Controllo: $y_F(0) = 0$ e $\dot{y}_F = 2 - 2e^{-t} = -y_F + 2t$. Dopo il transitorio $2e^{-t}$ resta $2t - 2$: una rampa di pendenza 2 più un gradino di ampiezza -2 .

[← Torna all'Esercizio 2, pagina 8](#)

Soluzione dell'Esercizio 3 – Risposte impulsive nelle nuove coordinate

Nelle coordinate z le matrici sono $\tilde{A} = TAT^{-1}$, $\tilde{B} = TB$, $\tilde{C} = CT^{-1}$, $\tilde{D} = D$ (Capitolo 2).

1. **Potenze.** I fattori $T^{-1}T$ interni si semplificano:

$$\tilde{A}^k = (TAT^{-1})(TAT^{-1}) \cdots (TAT^{-1}) = TA^kT^{-1}.$$

2. **Esponenziale.** Dalla serie, mettendo T in evidenza a sinistra e T^{-1} a destra:

$$\tilde{\Phi}(t) = e^{\tilde{A}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T A^k T^{-1} t^k}{k!} = T \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} \right) T^{-1} = T \Phi(t) T^{-1}.$$

3. **Le altre matrici.**

$$\tilde{H}(t) = e^{\tilde{A}t} \tilde{B} = T e^{At} T^{-1} TB = T H(t),$$

$$\tilde{\Psi}(t) = \tilde{C} e^{\tilde{A}t} = CT^{-1} T e^{At} T^{-1} = \Psi(t) T^{-1},$$

$$\tilde{W}(t) = \tilde{C} e^{\tilde{A}t} \tilde{B} + \tilde{D} \delta(t) = CT^{-1} T e^{At} T^{-1} TB + D \delta(t) = W(t).$$

Anche l'uscita libera non cambia: $\tilde{\Psi}(t) z_0 = \Psi(t) T^{-1} T x_0 = \Psi(t) x_0$.

[← Torna all'Esercizio 3, pagina 8](#)

Soluzione dell'Esercizio 4 – Esonero 2024, Canale 2, Prof.ssa Claudia Califano, esercizio 3

Dalla rappresentazione implicita $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx + Du$, con $x(t_0) = x_0$, si calcolano l'esponenziale $e^{At} = \sum_{k \geq 0} A^k t^k / k!$ e le matrici

$$\Phi(t) = e^{At}, \quad H(t) = e^{At} B, \quad \Psi(t) = C e^{At}, \quad W(t) = C e^{At} B + D \delta(t).$$

La rappresentazione esplicita è

$$x(t) = \Phi(t - t_0) x_0 + \int_{t_0}^t H(t - \tau) u(\tau) d\tau,$$

$$y(t) = \Psi(t - t_0) x_0 + \int_{t_0}^t W(t - \tau) u(\tau) d\tau.$$

Perché vale.

1. Derivando $x(t)$, con $\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At}$ e la regola per la derivata di un integrale con t nell'estremo e nell'integranda:

$$\dot{x}(t) = A e^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t A e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau + B u(t) = A x(t) + B u(t),$$

e $x(t_0) = x_0$.

2. Sostituendo $x(t)$ in $y = Cx + Du$ e scrivendo $Du(t) = \int_{t_0}^t D \delta(t - \tau) u(\tau) d\tau$, i due integrali si sommano nell'integrale di $W(t - \tau) u(\tau)$.

Per la stazionarietà conta solo $t - t_0$, e si può porre $t_0 = 0$.

[← Torna all'Esercizio 4, pagina 8](#)

Soluzione dell'Esercizio 5 – Appello del 03/02/2020, Prof.ssa Claudia Califano e Prof. Paolo Di Giamberardino, esercizio 4, adattato

	Vantaggi	Svantaggi
Implicito $\dot{x} = Ax + Bu$ $y = Cx + Du$	si scrive dalle leggi fisiche; matrici costanti; dà lo schema di simulazione, per simulare o realizzare il sistema	non dà stato e uscita: vanno calcolati risolvendo le equazioni differenziali
Esplicito Φ, H, Ψ, W	dà $x(t)$ e $y(t)$ noti x_0 e u ; separa evoluzione libera e forzata; W descrive tutto il comportamento forzato, non dipende dalle coordinate e si ricava da esperimenti (identificazione)	servono e^{At} e un integrale di convoluzione per ogni ingresso, sempre più pesanti al crescere di n

[← Torna all'Esercizio 5, pagina 8](#)

Soluzione dell'Esercizio 6 – Appello del 08/06/2020, Prof.ssa Claudia Califano e Prof. Paolo Di Giamberardino, esercizio 4

Modello esplicito. Con $x(t_0) = x_0$:

$$x(t) = \Phi(t - t_0) x_0 + \int_{t_0}^t H(t - \tau) u(\tau) d\tau, \quad y(t) = \Psi(t - t_0) x_0 + \int_{t_0}^t W(t - \tau) u(\tau) d\tau.$$

Matrici della forma implicita. Si pongono

$$A = \dot{\Phi}(0), \quad B = H(0), \quad C = \Psi(0),$$

e D uguale al coefficiente dell'impulso in W , cioè $W(t) = C H(t) + D \delta(t)$; inoltre $\Psi(t) = C \Phi(t)$, perché $\Psi(t) = C e^{At}$ e $\Phi(t) = e^{At}$.

Due conseguenze della composizione.

1. Con $t_1 = \tau$ la proprietà di H dà $H(t - \tau) = \Phi(t - \tau) H(0) = \Phi(t - \tau) B$.

2. Nella proprietà di Φ con intervalli h (da t_1 alla fine) e t (dall'inizio a t_1):
 $\Phi(t+h) = \Phi(h)\Phi(t)$. Quindi

$$\dot{\Phi}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Phi(h) - I}{h} \Phi(t) = \dot{\Phi}(0) \Phi(t) = A \Phi(t).$$

Equazione di stato. Nell'integrale t compare nell'estremo e nell'integranda (Capitolo 2); con $H(0) = B$ e $\frac{\partial}{\partial t} \Phi(t-\tau)B = A \Phi(t-\tau)B$:

$$\dot{x}(t) = A \Phi(t-t_0) x_0 + B u(t) + \int_{t_0}^t A \Phi(t-\tau) B u(\tau) d\tau = A x(t) + B u(t),$$

mettendo A in evidenza a sinistra; per $t = t_0$, $x(t_0) = \Phi(0)x_0 = x_0$.

Uscita. Con $\Psi = C \Phi$ e $W = C H + D \delta$:

$$y(t) = C \left(\Phi(t-t_0) x_0 + \int_{t_0}^t H(t-\tau) u(\tau) d\tau \right) + \int_{t_0}^t D \delta(t-\tau) u(\tau) d\tau = C x(t) + D u(t),$$

per la proprietà dell'impulso con $t_1 = t$. Il modello implicito è $\dot{x} = Ax + Bu$,
 $y = Cx + Du$.

[← Torna all'Esercizio 6, pagina 9](#)