

Appunti di Sistemi Dinamici

Canale 2 · Prof.ssa Claudia Califano

Capitolo 4: Calcolo dell'esponenziale di matrice ed evoluzione libera

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dalle lezioni in aula e dal materiale del corso

Argomenti: Esponenziale e cambio di coordinate · Matrici diagonali a blocchi
Autovettori destri e sinistri · Residui e forma spettrale
Molteplicità algebrica e geometrica · Forma di Jordan
Autovalori complessi coniugati · Blocco reale
Evoluzione libera e modi naturali · Traiettorie nel piano e nello spazio

Indice

1	L'esponenziale con un cambio di coordinate	1
2	Autovalori reali: autovettori sinistri e forma spettrale	1
3	Autovalori multipli e forma di Jordan	4
4	Autovalori complessi coniugati	7
5	Evoluzione libera e traiettorie	10
5.1	Il caso generale: modi naturali	13
6	Esercizi	15
7	Soluzioni	17

1 L'esponenziale con un cambio di coordinate

Proposizione – Esponenziale e cambio di coordinate

- Se $\tilde{A} = TAT^{-1}$, con T invertibile,

$$e^{At} = T^{-1} e^{\tilde{A}t} T.$$

- Se $\tilde{A} = \text{diag}(A_1, \dots, A_m)$ è diagonale a blocchi,

$$e^{\tilde{A}t} = \text{diag}(e^{A_1 t}, \dots, e^{A_m t}).$$

Dimostrazione

1. Dal Capitolo 3, $e^{\tilde{A}t} = T e^{At} T^{-1}$: si moltiplica a sinistra per T^{-1} e a destra per T .
2. Ogni potenza di una matrice diagonale a blocchi è diagonale a blocchi, con le potenze dei blocchi: $\tilde{A}^k = \text{diag}(A_1^k, \dots, A_m^k)$. La serie si somma blocco per blocco, come nel caso diagonale del Capitolo 2.

□

L'esponenziale compare in Φ , H , Ψ e W (Capitolo 3): calcolato e^{At} , si hanno l'evoluzione libera e la forzata. Con la serie il calcolo è pesante; si procede così:

1. si sceglie T^{-1} con una base di autovettori di A per colonne; se non bastano, con gli autovettori generalizzati (Sezione 3), e per gli autovalori complessi con le parti reale e immaginaria v_a, v_b (Sezione 4);
2. $\tilde{A} = TAT^{-1}$ è diagonale (Sezione 2) oppure diagonale a blocchi, con blocchi di Jordan (Sezione 3) o blocchi reali 2×2 per gli autovalori complessi (Sezione 4): se ne calcola l'esponenziale blocco per blocco;
3. si torna alle coordinate di partenza con $e^{At} = T^{-1} e^{\tilde{A}t} T$.

2 Autovalori reali: autovettori sinistri e forma spettrale

Definizione – Autovettore sinistro

Un vettore $w \neq 0$ è un **autovettore sinistro** di A associato all'autovalore λ se

$$w^T A = \lambda w^T,$$

cioè $w^T (A - \lambda I) = 0^T$. Gli autovettori v del Capitolo 2, con $Av = \lambda v$, si dicono **destri**.

Nota – Notazione del libro

Il libro chiama u_i gli autovettori destri e v'_i i sinistri, scritti come righe; qui sono v_i e $w_i^\top$, come nel Capitolo 2.

Proposizione – Le righe di T

Sia A diagonalizzabile con autovalori reali $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ e $T^{-1} = (v_1 \ \dots \ v_n)$, con v_i autovettore destro di λ_i . Le righe $w_1^\top, \dots, w_n^\top$ di T :

- sono autovettori sinistri:

$$w_i^\top A = \lambda_i w_i^\top;$$

- formano con i v_j una **base duale**:

$$w_i^\top v_j = 1 \text{ se } i = j, \quad w_i^\top v_j = 0 \text{ se } i \neq j.$$

La dimostrazione è l'Esercizio 1.

Osservazione – Normalizzazione

- Invertendo T^{-1} le righe di T soddisfano già tutta la base duale: non resta nulla da scegliere. È la strada sempre valida.
- Se λ_i è semplice, autovettore destro e sinistro sono definiti a meno di una costante. Si può allora calcolare w_i da $w^\top(A - \lambda_i I) = \mathbf{0}^\top$ e fissare la costante con $w_i^\top v_i = 1$; gli altri prodotti $w_i^\top v_j$ sono nulli da soli.
- Se λ_i è ripetuto, la sola condizione $w_i^\top v_i = 1$ non basta: con $A = I$, $v_1 = e_1$, $v_2 = e_2$, la riga $\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$ è un autovettore sinistro con $w^\top v_1 = 1$, ma $w^\top v_2 = 1$. Si impone tutta la dualità o si inverte T^{-1} .

Definizione – Residui

Il **residuo** associato a λ_i è la matrice $n \times n$

$$R_i = v_i w_i^\top,$$

prodotto di una colonna per una riga. Ha rango 1: la colonna j è v_i moltiplicato per l'elemento j di $w_i^\top$.

Da non confondere con $w_i^\top v_i = 1$, che è uno scalare.

Teorema – Forma spettrale dell'esponenziale

Se A è diagonalizzabile con autovalori reali $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, autovettori destri v_i e sinistri w_i come nella proposizione sopra,

$$e^{At} = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} v_i w_i^T = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} R_i$$

Per $t = 0$, e derivando in $t = 0$ ($A = \dot{\Phi}(0)$, Capitolo 3):

$$\sum_{i=1}^n R_i = I, \quad A = \sum_{i=1}^n \lambda_i R_i.$$

Dimostrazione

1. Con $\tilde{A} = TAT^{-1} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $e^{\tilde{A}t} = \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t})$ (Capitolo 2) ed $e^{At} = T^{-1}e^{\tilde{A}t}T$.
2. La matrice diagonale, a destra, moltiplica ogni colonna di T^{-1} per il proprio esponenziale: $T^{-1}e^{\tilde{A}t} = (e^{\lambda_1 t}v_1 \ \dots \ e^{\lambda_n t}v_n)$.
3. Il prodotto di una matrice scritta per colonne per una scritta per righe è la somma dei prodotti colonna per riga:

$$(e^{\lambda_1 t}v_1 \ \dots \ e^{\lambda_n t}v_n) \begin{pmatrix} w_1^T \\ \vdots \\ w_n^T \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} v_i w_i^T.$$

□

Si chiama **spettrale** perché usa tutti gli autovalori, lo spettro di A . Bastano autovalori, autovettori destri e l'inversa T : il prodotto $T^{-1}e^{\tilde{A}t}T$ non serve.

Osservazione – Il risultato non dipende dalle scelte

- Moltiplicando v_i per $k \neq 0$, la riga w_i^T di T si divide per k : R_i non cambia.
- Cambiando l'ordine degli autovalori si scambiano i termini della somma.

Esempio – Massa-molla-smorzatore con $M = 1$, $b = 3$, $K = 2$

In forma compagna (Capitolo 1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$, con

$$\lambda_1 = -2, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}; \quad \lambda_2 = -1, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad T = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le righe di T sono $w_1^T = (-1 \quad -1)$ e $w_2^T = (2 \quad 1)$, e

$$e^{At} = e^{-2t} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + e^{-t} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

I due residui sommano a I . I calcoli sono nell'Esercizio 2.

3 Autovalori multipli e forma di Jordan

Definizione – Molteplicità algebrica e geometrica

Per un autovalore λ_i di A :

- la **molteplicità algebrica** μ_i è la sua molteplicità come radice del polinomio caratteristico $\det(\lambda I - A)$;
- la **molteplicità geometrica** è la caduta di rango $n - \text{rk}(A - \lambda_i I)$: il numero di autovettori indipendenti associati a λ_i .

Per il Capitolo 2, A è diagonalizzabile se e solo se le due molteplicità coincidono per ogni autovalore. Un autovalore semplice ha caduta di rango 1: con n autovalori distinti A è sempre diagonalizzabile.

Il massa-molla-smorzatore con $b^2 = 4MK$ (Capitolo 1) ha un autovalore reale doppio λ e non è diagonalizzabile: in forma compagna la prima riga di $A - \lambda I$ è $(-\lambda \quad 1)$, mai nulla, quindi il rango è 1 e c'è un solo autovettore.

Esempio – Stessi autovalori, comportamento diverso

Le matrici triangolari

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

hanno gli stessi autovalori: $\lambda_1 = -2$, semplice, con autovettore $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ per entrambe, e $\lambda = 1$ con $\mu = 2$.

	A_1	A_2
$A - I$	$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
caduta di rango	2	1
autovettori di $\lambda = 1$	$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$	solo $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$
diagonalizzabile	sì	no

Osservazione – Autovalore ripetuto con A_1 diagonalizzabile

- Ogni vettore non nullo del piano di v_2 e v_3 è autovettore di $\lambda = 1$: i due vettori della base si scelgono liberamente, purché indipendenti.
- Con $T^{-1} = (v_1 \ v_2 \ v_3)$, $TA_1T^{-1} = \text{diag}(-2, 1, 1)$. Nella forma spettrale i residui di $\lambda = 1$ hanno la stessa legge e^t e si sommano:

$$e^{A_1 t} = e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice di e^t ha rango 2, la molteplicità di $\lambda = 1$: due leggi temporali, ma tre autovettori.

Definizione – Autovettore generalizzato

Se λ ha molteplicità algebrica 2 ma un solo autovettore v , un **autovettore generalizzato** è un vettore v_g tale che

$$(A - \lambda I) v_g = v.$$

I due vettori formano una **catena**.

Proposizione – Blocco di Jordan

Con v e v_g in due colonne consecutive di T^{-1} , in quest'ordine, sulla diagonale di TAT^{-1} compare il **blocco di Jordan**

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Dimostrazione

$Av = \lambda v$ e $Av_g = v + \lambda v_g$; in forma matriciale $A \begin{pmatrix} v & v_g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v & v_g \end{pmatrix} J$. Da $AT^{-1} = T^{-1}(TAT^{-1})$, le colonne di TAT^{-1} nelle posizioni di v e v_g sono quelle di J . $\square$

Esempio – La catena di A_2

Per $\lambda = 1$ l'autovettore è $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$. Da $(A_2 - I)v_g = v_2$, cioè $-3a + b + c = 1$ e $c = 3$, con $a = 1$ si ha $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$. Con $T^{-1} = (v_1 \ v_2 \ v_3)$:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad T = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 9 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad TA_2T^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} :$$

un blocco 1×1 per -2 e un blocco di Jordan per 1 .

Proposizione – Esponenziale del blocco di Jordan

$$e^{Jt} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} :$$

accanto a $e^{\lambda t}$ compare la legge temporale $t e^{\lambda t}$.

Dimostrazione

1. Per induzione $J^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & \lambda^k \end{pmatrix}$: moltiplicando per J , l'elemento in alto a destra diventa $\lambda^k + k\lambda^k = (k+1)\lambda^k$.
2. Nella serie gli elementi diagonali danno $e^{\lambda t}$, quello in alto a destra

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\lambda^{k-1}t^k}{k!} = t \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} = t e^{\lambda t}.$$

$\square$

Per $\lambda = 0$ la serie si ferma: $e^{Jt} = I + Jt$ e resta la sola legge t . Per A_2 , $e^{\tilde{A}t} = \text{diag}(e^{-2t}, e^t \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$: in $e^{A_2 t} = T^{-1} e^{\tilde{A}t} T$ compaiono le leggi e^{-2t} , e^t e $t e^t$.

4 Autovalori complessi coniugati

Proposizione – Blocco reale di una coppia complessa

Sia $\lambda = \alpha + j\omega$, con $\omega > 0$, un autovalore di A con autovettore $v = v_a + j v_b$, dove v_a e v_b sono reali; il coniugato $\alpha - j\omega$ ha autovettore $v_a - j v_b$. Con v_a e v_b in due colonne consecutive di T^{-1} , in quest'ordine, sulla diagonale di TAT^{-1} compare il blocco reale

$$\begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix}.$$

Dimostrazione

1. Si sviluppa $(A - \lambda I)(v_a + j v_b) = \mathbf{0}$ con $j^2 = -1$ e si separano parte reale e parte immaginaria, entrambe nulle:

$$(A - \alpha I) v_a + \omega v_b = \mathbf{0}, \quad (A - \alpha I) v_b - \omega v_a = \mathbf{0}.$$

2. Quindi $Av_a = \alpha v_a - \omega v_b$ e $Av_b = \omega v_a + \alpha v_b$, cioè

$$A \begin{pmatrix} v_a & v_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_a & v_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix}.$$

□

Con i due autovettori complessi come colonne, $TAT^{-1} = \text{diag}(\alpha + j\omega, \alpha - j\omega)$ è diagonale, ma complessa, e il cambio di coordinate è complesso. I vettori reali $v_a = \frac{v+\bar{v}}{2}$ e $v_b = \frac{v-\bar{v}}{2j}$, con $\bar{v} = v_a - jv_b$, generano lo stesso piano: si rinuncia alla forma diagonale per avere coordinate e matrice reali.

Proposizione – Calcolare v_a e v_b senza numeri complessi

Si scrive l'uguaglianza della dimostrazione con le incognite reali v_a e v_b :

$$A \begin{pmatrix} v_a & v_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_a & v_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix}.$$

Sono $2n$ equazioni lineari reali; per una coppia semplice hanno due gradi di libertà, come la costante complessa che fissa v : si riduce il sistema, si scelgono i due parametri liberi e si ricavano le altre incognite. Ogni soluzione non nulla dà un autovettore $v = v_a + j v_b$ di $\alpha + j\omega$, e i conti con j non servono.

Proposizione – Esponenziale del blocco reale

$$\exp \left(\begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix} t \right) = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix}.$$

Dimostrazione

Siano $\tilde{A}$ il blocco e $\Phi(t)$ la matrice a destra. $\Phi(0) = I$ e, derivando,

$$\dot{\Phi}(t) = \alpha \Phi(t) + \omega e^{\alpha t} \begin{pmatrix} -\sin \omega t & \cos \omega t \\ -\cos \omega t & -\sin \omega t \end{pmatrix} = \tilde{A} \Phi(t).$$

Ogni colonna di Φ risolve $\dot{x} = \tilde{A}x$ con condizione iniziale la colonna corrispondente di I ; per il Capitolo 2 quella soluzione è la colonna di $e^{\tilde{A}t}$, quindi $\Phi(t) = e^{\tilde{A}t}$. In alternativa si parte dalla forma diagonale complessa, $\text{diag}(e^{(\alpha+j\omega)t}, e^{(\alpha-j\omega)t})$, e si torna a v_a, v_b con $e^{\pm j\omega t} = \cos \omega t \pm j \sin \omega t$. $\square$

Teorema – Forma spettrale con una coppia complessa

Sia $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ con autovalori $\alpha \pm j\omega$, $T^{-1} = (v_a \ v_b)$ e $w_a^\top, w_b^\top$ le righe di T . Allora

$$e^{At} = e^{\alpha t} \left[\cos \omega t (v_a w_a^\top + v_b w_b^\top) + \sin \omega t (v_a w_b^\top - v_b w_a^\top) \right]$$

Dimostrazione

1. $T^{-1}e^{\tilde{A}t}$ ha colonne $e^{\alpha t}(\cos \omega t v_a - \sin \omega t v_b)$ ed $e^{\alpha t}(\sin \omega t v_a + \cos \omega t v_b)$.
2. Colonna per riga con $w_a^\top$ e $w_b^\top$, come nella forma spettrale:

$$e^{At} = e^{\alpha t} [(\cos \omega t v_a - \sin \omega t v_b) w_a^\top + (\sin \omega t v_a + \cos \omega t v_b) w_b^\top];$$

si raccolgono i termini in $\cos \omega t$ e in $\sin \omega t$.

$\square$

Per ricordarla: il coseno moltiplica i prodotti con la stessa lettera, sommati; il seno quelli con le lettere scambiate, con il meno davanti a $v_b w_a^\top$.

Esempio – Massa-molla-smorzatore con $M = 1$, $b = 4$, $K = 5$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$, con $\det(\lambda I - A) = \lambda^2 + 4\lambda + 5$ e $\lambda = -2 \pm j$: $\alpha = -2$, $\omega = 1$. Per $\lambda = -2 + j$ la prima riga di $(A - \lambda I)v = \mathbf{0}$ è $(2 - j)a + b = 0$; con $a = 1$

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 + j \end{pmatrix}, \quad v_a = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Con $w_a^\top = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $w_b^\top = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$: $TAT^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $v_a w_a^\top + v_b w_b^\top = I$ e

$$e^{At} = e^{-2t} \left[\cos t \, I + \sin t \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} \right].$$

Controllo: in $t = 0$ vale I , e la derivata in 0 è $-2I + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} = A$.

Proposizione – Forma spettrale nel caso generale

Sia A diagonalizzabile con μ autovalori reali λ_i e ν coppie $\alpha_k \pm j\omega_k$, ripetuti secondo la molteplicità: $\mu + 2\nu = n$.

- Con $T^{-1} = (v_1 \cdots v_\mu \ v_{1a} \ v_{1b} \cdots v_{\nu a} \ v_{\nu b})$, TAT^{-1} è diagonale a blocchi: μ blocchi 1×1 , μ λ_i , e ν blocchi reali 2×2 .
- Con $w_i^\top$, $w_{ka}^\top$, $w_{kb}^\top$ le righe di T :

$$e^{At} = \sum_{i=1}^{\mu} e^{\lambda_i t} v_i w_i^\top + \sum_{k=1}^{\nu} e^{\alpha_k t} \left[\cos \omega_k t (v_{ka} w_{ka}^\top + v_{kb} w_{kb}^\top) + \sin \omega_k t (v_{ka} w_{kb}^\top - v_{kb} w_{ka}^\top) \right].$$

Dimostrazione

L'esponenziale di TAT^{-1} si calcola blocco per blocco (Sezione 1). In $T^{-1}e^{\tilde{A}t}T$ ogni blocco moltiplica solo le proprie colonne di T^{-1} e le proprie righe di T : si sommano i termini dei due teoremi di forma spettrale. $\square$

5 Evoluzione libera e traiettorie

Proposizione – Evoluzione libera con autovalori reali

Se A è diagonalizzabile con autovalori reali, lo stato iniziale si scrive nella base degli autovettori,

$$x_0 = \sum_{i=1}^n c_i v_i, \quad c_i = w_i^\top x_0,$$

e

$$x_L(t) = e^{At} x_0 = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t} v_i$$

Lungo ogni v_i la componente evolve con la legge temporale $e^{\lambda_i t}$, pesata dalla coordinata iniziale c_i .

Dimostrazione

Per la base duale $w_i^\top x_0 = \sum_j c_j w_i^\top v_j = c_i$, e $R_i v_j = v_i (w_i^\top v_j)$ vale v_i per $j = i$ e $\mathbf{0}$ altrimenti. Nella forma spettrale

$$e^{At} x_0 = \sum_i e^{\lambda_i t} R_i \sum_j c_j v_j = \sum_i c_i e^{\lambda_i t} v_i.$$

□

È il moto lungo gli autovettori del Capitolo 2, per n qualsiasi: $c_i = z_{i,0}$ è la componente i di $z_0 = T x_0$ e si calcola con un prodotto scalare. Se x_0 sta sulla retta di v_i , solo c_i è diverso da zero e il moto resta su quella retta.

La Figura 1 applica la proposizione con gli autovettori dell'esempio del massa-molla-smorzatore. Con $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = -1$ entrambe le componenti vanno a zero, quella lungo v_1 più in fretta: la traiettoria arriva all'origine lungo v_2 . Con $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 1$ la componente lungo v_2 cresce: la traiettoria si allontana dall'origine e si avvicina alla retta di v_2 .

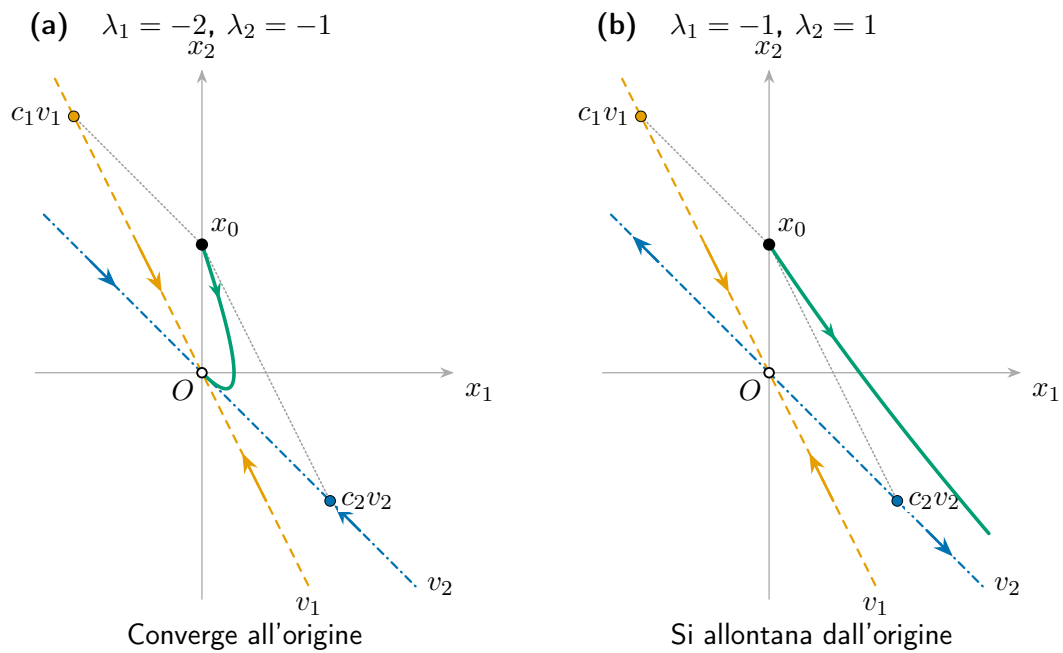


Figura 1: **Una componente crescente cambia il destino della traiettoria.** (a) Entrambe decadono: il moto arriva all'origine lungo v_2 . (b) La componente lungo v_2 cresce e il moto si allontana. La curva continua verde è $x_L(t)$; i segmenti puntinati costruiscono le componenti di x_0 .

Proposizione – Evoluzione libera con una coppia complessa

Sia $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ con autovalori $\alpha \pm j\omega$, v_a, v_b, w_a, w_b come nella Sezione 4 e

$$c_a = w_a^\top x_0, \quad c_b = w_b^\top x_0.$$

Allora

$$x_L(t) = m e^{\alpha t} [\sin(\omega t + \varphi) v_a + \cos(\omega t + \varphi) v_b]$$

dove m e φ sono modulo e fase del numero complesso $c_b + j c_a = m e^{j\varphi}$:

$$m = \sqrt{c_a^2 + c_b^2}, \quad \sin \varphi = \frac{c_a}{m}, \quad \cos \varphi = \frac{c_b}{m} \quad (m > 0).$$

Se $m = 0$ il moto è nullo e φ è arbitraria. Il moto avviene nel piano di v_a e v_b ; per $\alpha = 0$ è periodico:

$$x_L\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) = x_L(t).$$

Dimostrazione

1. Con $x_0 = c_a v_a + c_b v_b$, nella forma spettrale con la coppia restano, per la base duale, solo $w_a^T(c_a v_a) = c_a$ e $w_b^T(c_b v_b) = c_b$:

$$x_L(t) = e^{\alpha t} [(c_a \cos \omega t + c_b \sin \omega t) v_a + (c_b \cos \omega t - c_a \sin \omega t) v_b].$$

2. Con $c_a = m \sin \varphi$ e $c_b = m \cos \varphi$, per le formule di addizione $c_a \cos \omega t + c_b \sin \omega t = m \sin(\omega t + \varphi)$ e $c_b \cos \omega t - c_a \sin \omega t = m \cos(\omega t + \varphi)$.

□

Lungo v_a e lungo v_b ci sono due moti armonici di pulsazione ω , con l'involuppo $e^{\alpha t}$: la traiettoria è la loro combinazione (Figura 2).

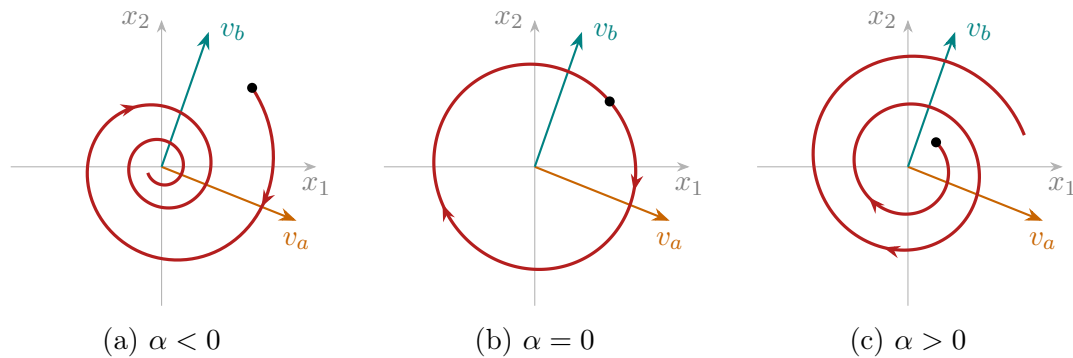


Figura 2: Evoluzione libera con autovalori $\alpha \pm j\omega$: spirale convergente per $\alpha < 0$, curva chiusa (un'ellisse) per $\alpha = 0$, spirale divergente per $\alpha > 0$. Il punto nero è x_0 ; il moto resta nel piano di v_a e v_b .

Il segno della parte reale degli autovalori decide se lo stato va all'origine o se ne allontana; la parte immaginaria, se oscilla. La tabella vale quando x_0 ha coordinate non nulle lungo tutti gli autovettori: un modo con coefficiente nullo non compare, e con $A = \text{diag}(-1, 1)$ e $x_0 = e_1$ il moto va all'origine.

Autovalori	Componenti	Traiettoria
reali, negativi	vanno a zero	all'origine, lungo l'autovettore dell'autovalore più vicino a zero
reali, di segno opposto	una va a zero, l'altra cresce	si allontana dall'origine, verso la retta dell'autovettore di $\lambda > 0$
complessi, $\alpha < 0$	oscillano smorzate	spirale convergente
complessi, $\alpha = 0$	oscillano con ampiezza costante	curva chiusa, un'ellisse, percorsa con periodo $2\pi/\omega$
complessi, $\alpha > 0$	oscillano crescenti	spirale divergente

5.1 Il caso generale: modi naturali

Proposizione – Modi naturali

Sia A diagonalizzabile, con autovalori e autovettori come nella forma spettrale nel caso generale, e

$$c_i = w_i^T x_0, \quad c_{ka} = w_{ka}^T x_0, \quad c_{kb} = w_{kb}^T x_0.$$

L'evoluzione libera è la somma di $\mu + \nu$ **modi naturali**:

$$x_L(t) = \sum_{i=1}^{\mu} c_i e^{\lambda_i t} v_i + \sum_{k=1}^{\nu} m_k e^{\alpha_k t} [\sin(\omega_k t + \varphi_k) v_{ka} + \cos(\omega_k t + \varphi_k) v_{kb}]$$

- il modo **aperiodico** $c_i e^{\lambda_i t} v_i$ di ogni autovalore reale, lungo la retta di v_i ;
- il modo **pseudoperiodico** di ogni coppia, nel piano di v_{ka} e v_{kb} , con m_k e φ_k modulo e fase di $c_{kb} + j c_{ka}$.

Un modo con coefficiente nullo, $c_i = 0$ o $m_k = 0$, è assente.

Dimostrazione

Si scrive $x_0 = \sum_i c_i v_i + \sum_k (c_{ka} v_{ka} + c_{kb} v_{kb})$ e si applica la forma spettrale nel caso generale. Per la base duale ogni termine agisce solo sulle coordinate del proprio autovalore o della propria coppia: un autovalore reale dà $c_i e^{\lambda_i t} v_i$, come nel caso reale; una coppia dà il moto nel piano, come per $n = 2$. $\square$

La traiettoria è la somma dei modi presenti: ognuno evolve per conto suo, lungo la propria retta o nel proprio piano. Un modo, aperiodico o pseudoperiodico, va a zero se la parte reale del suo autovalore è negativa e diverge se è positiva: per prevedere la traiettoria bastano i segni degli autovalori dei modi presenti, senza calcoli.

Esempio – Un moto nello spazio

Sia $n = 3$, con v_a e v_b nel piano $x_1 x_2$, v_1 lungo l'asse x_3 e $\lambda_1 > 0$ (Figura 3).

- Con $\alpha < 0$ la componente nel piano segue una spirale convergente e quella lungo x_3 cresce: la traiettoria gira attorno all'asse x_3 sempre più stretta e se ne va lungo di esso, come una molla tirata.
- Con $\alpha = 0$ la proiezione sul piano è una curva chiusa: la traiettoria si avvolge su un cilindro e si allontana lungo x_3 .

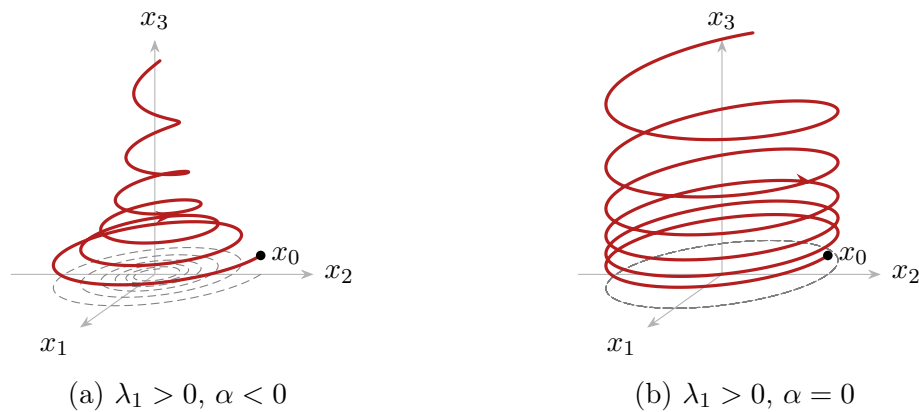


Figura 3: Somma di un modo aperiodico divergente lungo x_3 e di un modo pseudoperiodico nel piano x_1x_2 . (a) La spirale si stringe mentre il moto sale. (b) Il moto resta su un cilindro. La curva tratteggiata è la proiezione della traiettoria sul piano x_1x_2 .

Osservazione – Parte reale nulla e molteplicità

- Con molteplicità algebrica e geometrica uguali, un modo con parte reale nulla resta limitato: costante, $c_i v_i$, per $\lambda = 0$; oscillazione di ampiezza costante per $\pm j\omega$.
- Se le molteplicità differiscono, accanto a $e^{\lambda t}$ compaiono $t e^{\lambda t}$ (Sezione 3) e, con catene più lunghe, $\frac{t^2}{2} e^{\lambda t}, \dots$; per una coppia, t moltiplica seno e coseno. Con parte reale negativa l'esponenziale prevale e il modo va a zero; con parte reale nulla il fattore polinomiale cresce; con parte reale positiva il modo diverge comunque.
- La crescita polinomiale compare solo se x_0 ha coordinata non nulla lungo l'autovettore generalizzato: con $\lambda = 0$ e x_0 sull'autovettore della catena lo stato resta fermo.

Gli Esercizi 3 e 4 cercano gli stati iniziali da cui l'evoluzione libera va a zero.

Riepilogo

- **Metodo:** $e^{At} = T^{-1} e^{\tilde{A}t} T$, con $\tilde{A} = T A T^{-1}$ a blocchi.
- **Autovettori sinistri**, A diagonalizzabile reale: le righe di T , base duale dei v_i .
- **Forma spettrale**, A diagonalizzabile reale: $e^{At} = \sum_i e^{\lambda_i t} v_i w_i^T$.
- **Molteplicità:** A diagonalizzabile se algebrica = geometrica per ogni autovalore.
- **Blocco di Jordan:** $e^{Jt} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- **Coppia complessa:** $\exp \begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix} t = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix}$.
- **Modi naturali:** $c_i e^{\lambda_i t} v_i$ e $m e^{\alpha t} [\sin(\omega t + \varphi) v_a + \cos(\omega t + \varphi) v_b]$.
- **Traiettorie:** i modi presenti vanno a zero se $\text{Re } \lambda < 0$, divergono se > 0 .

6 Esercizi

Esercizio 1 – Righe di T e autovettori sinistri

Sia A diagonalizzabile con autovalori reali e $T^{-1} = (v_1 \cdots v_n)$, con $Av_i = \lambda_i v_i$. Mostrare che le righe $w_i^\top$ di T soddisfano $w_i^\top A = \lambda_i w_i^\top$ e $w_i^\top v_j = 1$ se $i = j$, 0 se $i \neq j$.

Soluzione a pagina 17 →

Esercizio 2 – Matrice di transizione del massa-molla-smorzatore

Per il massa-molla-smorzatore con $M = 1$, $b = 3$, $K = 2$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix},$$

calcolare autovalori, autovettori destri e sinistri e la matrice di transizione e^{At} . Calcolare poi l'evoluzione libera dello stato da $x_0 = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 2 \end{pmatrix}$ (posizione 1,5, velocità 2) e descrivere la traiettoria.

Soluzione a pagina 17 →

Esercizio 3 – Esonero del 13/11/2023 (variante B), Canale 2, Prof.ssa Claudia Califano, esercizio 1, adattato

Si consideri il sistema descritto da

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t), \quad y(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x(t).$$

Determinare l'insieme degli stati iniziali per i quali l'evoluzione libera nello stato converge a zero asintoticamente.

Soluzione a pagina 18 →

Esercizio 4 – Appello del 08/01/2025, Canale 2, Prof.ssa Claudia Califano, esercizio 1, adattato

Si consideri il sistema

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} u(t), \quad y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} x(t).$$

- (c) Determinare l'insieme degli stati iniziali per i quali l'evoluzione libera nello stato converge a zero asintoticamente.
- (d) Calcolare la risposta impulsiva nello stato e quella in uscita.

Soluzione a pagina 19 →

7 Soluzioni

Soluzione dell'Esercizio 1 – Righe di T e autovettori sinistri

Base duale. L'elemento (i, j) di TT^{-1} è la riga i di T per la colonna j di T^{-1} , cioè $w_i^T v_j$. Poiché $TT^{-1} = I$, vale 1 per $i = j$ e 0 altrimenti.

Autovettori sinistri. Con i v_i per colonne, $TAT^{-1} = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ (Capitolo 2). Moltiplicando a destra per T :

$$TA = \Lambda T.$$

La riga i di TA è $w_i^T A$; la riga i di ΛT è la riga i di T moltiplicata per λ_i , cioè $\lambda_i w_i^T$. Quindi $w_i^T A = \lambda_i w_i^T$, e $w_i \neq \mathbf{0}$ perché T è invertibile.

[← Torna all'Esercizio 1, pagina 15](#)

Soluzione dell'Esercizio 2 – Matrice di transizione del massa-molla-smorzatore

Autovalori. A è in forma compagna: $\det(\lambda I - A) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 2)(\lambda + 1)$, quindi $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = -1$, reali e distinti.

Autovettori destri, con componenti a, b .

- $\lambda_1 = -2$: $(A + 2I)v = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} v = \mathbf{0}$ dà $2a + b = 0$, quindi $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.
- $\lambda_2 = -1$: $(A + I)v = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} v = \mathbf{0}$ dà $a + b = 0$, quindi $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Autovettori sinistri, righe di T :

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \det T^{-1} = -1 + 2 = 1, \quad T = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$w_1^T = \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix}$ e $w_2^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$. Controllo: $w_1^T A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix} = -2w_1^T$, $w_2^T A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \end{pmatrix} = -w_2^T$.

Matrice di transizione. Con i residui

$$R_1 = v_1 w_1^T = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad R_2 = v_2 w_2^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$e^{At} = e^{-2t} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + e^{-t} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Controlli: $R_1 + R_2 = I$ e $-2R_1 - R_2 = A$. Con l'ordine opposto degli autovalori, $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ e $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$: gli stessi residui, in ordine scambiato.

Evoluzione libera. $c_1 = w_1^T x_0 = -1,5 - 2 = -\frac{7}{2}$ e $c_2 = w_2^T x_0 = 3 + 2 = 5$:

$$x_L(t) = -\frac{7}{2} e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + 5 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5e^{-t} - \frac{7}{2}e^{-2t} \\ 7e^{-2t} - 5e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Controllo: $x_L(0) = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Traiettoria. Le proiezioni di x_0 sono $c_1 v_1 = \begin{pmatrix} -7/2 \\ 7 \end{pmatrix}$ e $c_2 v_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}$. Le due componenti vanno a zero; quella lungo v_1 , come e^{-2t} , prima di quella lungo v_2 : la traiettoria va all'origine senza oscillare e vi arriva lungo la retta di v_2 .

← *Torna all'Esercizio 2, pagina 15*

Soluzione dell'Esercizio 3 – Esonero del 13/11/2023 (variante B), Canale 2, Prof.ssa Claudia Califano, esercizio 1, adattato

Autovalori. A è triangolare superiore a blocchi: il blocco $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ha la forma $\begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix}$, con autovalori $2 \pm j$ ($\alpha = 2$, $\omega = 1$); l'ultimo elemento dà $\lambda_3 = -1$.

Autovettori.

- $\lambda = 2 + j$: in $(A - \lambda I)v = \mathbf{0}$ la terza riga dà $(-3 - j)c = 0$, cioè $c = 0$, la prima $-ja + b = 0$. Con $a = 1$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ 0 \end{pmatrix}$: $v_a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- $\lambda_3 = -1$: $(A + I)v = \mathbf{0}$ dà $3a + b + c = 0$ e $-a + 3b + c = 0$; sottraendo, $b = 2a$, e poi $c = -5a$: $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Coordinate di x_0 . Con $T^{-1} = (v_a \ v_b \ v_3)$:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Per $x_0 = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$: $c_a = p + \frac{r}{5}$, $c_b = q + \frac{2r}{5}$, $c_3 = -\frac{r}{5}$.

Evoluzione libera. Per la proposizione sui modi naturali:

$$x_L(t) = c_3 e^{-t} v_3 + m e^{2t} [\sin(t + \varphi) v_a + \cos(t + \varphi) v_b], \quad m = \sqrt{c_a^2 + c_b^2}.$$

Le coordinate di $x_L(t)$ lungo v_a e v_b sono $m e^{2t} \sin(t + \varphi)$ e $m e^{2t} \cos(t + \varphi)$: la somma dei loro quadrati è $m^2 e^{4t}$, che cresce se $m \neq 0$. Serve quindi $m = 0$, cioè $c_a = c_b = 0$; allora resta $c_3 e^{-t} v_3 \rightarrow \mathbf{0}$.

Insieme cercato. $c_a = c_b = 0$ significa $x_0 = c_3 v_3$: la retta di v_3 ,

$$x_0 = k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Da ogni altro stato iniziale la componente nel piano di v_a e v_b , il piano x_1x_2 , segue una spirale divergente, perché $\alpha = 2 > 0$.

[← Torna all'Esercizio 3, pagina 15](#)

Soluzione dell'Esercizio 4 – Appello del 08/01/2025, Canale 2, Prof.ssa Claudia Califano, esercizio 1, adattato

Autovalori. La prima colonna è $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$: A è triangolare a blocchi, con $\lambda_1 = -3$ e gli autovalori del blocco $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, radici di $(\lambda - 1)(\lambda + 1) + 5 = \lambda^2 + 4$: $\pm 2j$, cioè $\alpha = 0$, $\omega = 2$.

Autovettori.

- $\lambda_1 = -3$: $Ae_1 = -3e_1$, quindi $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- $\lambda = 2j$: le ultime due righe di $(A - 2jI)v = \mathbf{0}$ danno $b = -(1 + 2j)c$, la prima $(-3 - 2j)a - b + c = 0$. L'autovettore è definito a meno di una costante complessa: con $c = 3 + 2j$ si ha $b = 1 - 8j$ e $a = 2 + 2j$,

$$v = \begin{pmatrix} 2 + 2j \\ 1 - 8j \\ 3 + 2j \end{pmatrix}, \quad v_a = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_b = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Controllo: $Av_a = \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ -4 \end{pmatrix} = -2v_b$ e $Av_b = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = 2v_a$, come $\alpha v_a - \omega v_b$ e $\omega v_a + \alpha v_b$.

(c) Con $x_0 = c_1v_1 + c_av_a + c_bv_b$ e $\alpha = 0$:

$$x_L(t) = c_1 e^{-3t} v_1 + m[\sin(2t + \varphi) v_a + \cos(2t + \varphi) v_b], \quad m = \sqrt{c_a^2 + c_b^2}.$$

La parte nel piano di v_a e v_b oscilla con ampiezza costante m : $x_L \rightarrow \mathbf{0}$ solo se $m = 0$, cioè $c_a = c_b = 0$ e $x_0 = c_1v_1$. L'insieme cercato è la retta di v_1 ,

$$x_0 = k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R};$$

da ogni altro stato iniziale la traiettoria tende a una curva chiusa nel piano di v_a e v_b .

(d) $H(t) = e^{At}B$ è l'evoluzione libera da $x_0 = B$. Le coordinate di B si trovano da $B = c_1v_1 + c_av_a + c_bv_b$: la seconda e la terza componente danno $c_a - 8c_b = 5$ e $3c_a + 2c_b = 2$, quindi $c_b = -\frac{1}{2}$, $c_a = 1$, e la prima $c_1 + 2c_a + 2c_b = 1$ dà $c_1 = 0$. Con

la formula del punto (c), prima delle formule di addizione:

$$H(t) = (\cos 2t - \tfrac{1}{2} \sin 2t) v_a + (-\tfrac{1}{2} \cos 2t - \sin 2t) v_b = \cos 2t \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \sin 2t \begin{pmatrix} -3 \\ \frac{15}{2} \\ -\frac{7}{2} \end{pmatrix}.$$

Manca la legge e^{-3t} , perché B non ha componente lungo v_1 . Controllo: $H(0) = B$ e $\dot{H}(0) = \begin{pmatrix} -6 \\ 15 \\ -7 \end{pmatrix} = AB$.

In uscita, con $D = 0$:

$$W(t) = C H(t) = 3 \cos 2t - \frac{13}{2} \sin 2t.$$

[← Torna all'Esercizio 4, pagina 16](#)