

Appunti di Sistemi Dinamici

Canale 2 · Prof.ssa Claudia Califano

Capitolo 5: Parametri dei modi naturali

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dalle lezioni in aula e dal materiale del corso

Argomenti: Costante di tempo · Pulsazione naturale e smorzamento
Un sistema del terzo ordine: schema, modi e traiettoria

Indice

1	Costante di tempo	1
2	Pulsazione naturale e smorzamento	1
3	Esercizi	4
4	Soluzioni	6

1 Costante di tempo

Definizione – Costante di tempo

La **costante di tempo** di un modo aperiodico con autovalore reale $\lambda < 0$ è

$$\tau = -\frac{1}{\lambda}, \quad \text{così che} \quad e^{\lambda t} = e^{-t/\tau}.$$

In $t = \tau$ la legge vale $e^{-1} = 1/e \approx 0,37$: τ è il tempo in cui il modo si riduce a $1/e$ del valore iniziale. Nel caso scalare $x_L(t) = e^{-t/\tau} x_0$ passa da x_0 a x_0/e in un tempo τ .

Più λ è negativo, più τ è piccola e più in fretta il modo va a zero: con $\lambda = -1$, $\tau = 1$; con $\lambda = -100$, $\tau = 0,01$ (Figura 1).

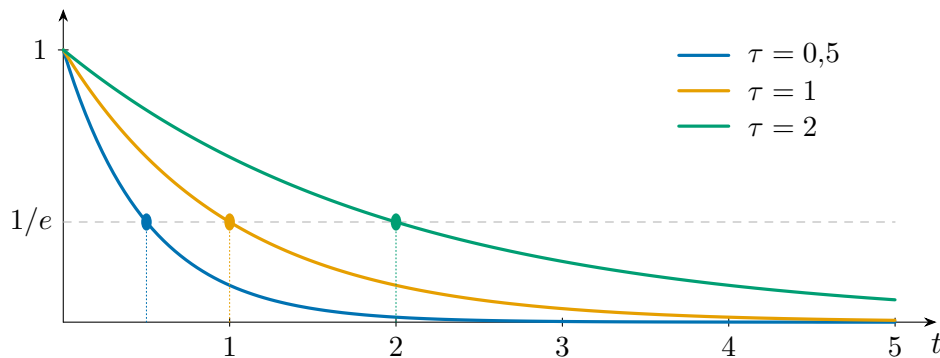


Figura 1: La legge $e^{-t/\tau}$ per tre costanti di tempo: in $t = \tau$ vale $1/e$.

2 Pulsazione naturale e smorzamento

Definizione – Pulsazione naturale e smorzamento

Per un modo pseudoperiodico con autovalori $\alpha \pm j\omega$, $\omega > 0$, la **pulsazione naturale** ω_n è il modulo dell'autovalore e lo **smorzamento** ξ ne misura l'inclinazione:

$$\omega_n = \sqrt{\alpha^2 + \omega^2}, \quad \xi = -\frac{\alpha}{\omega_n}.$$

Per $\alpha < 0$, nel piano complesso $-\alpha$ e ω sono i cateti del triangolo che ha per ipotenusa il segmento dall'origine ad $\alpha + j\omega$, lungo ω_n . Detto θ l'angolo fra il semiasse immaginario positivo e quel segmento (Figura 2),

$$\xi = \sin \theta$$

Per $\alpha > 0$ lo smorzamento è negativo e l'angolo, misurato così, ne dà solo il valore assoluto.

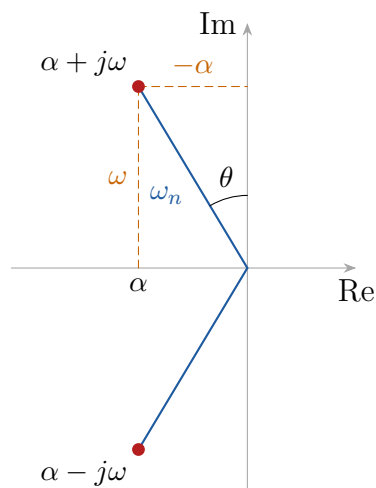


Figura 2: Pulsazione naturale ω_n e angolo θ di una coppia con $\alpha < 0$: $\xi = \sin \theta = -\alpha/\omega_n$.

Proposizione – Parte reale e immaginaria da ω_n e ξ

Per una coppia complessa, $|\xi| < 1$ e

$$\alpha = -\xi \omega_n, \quad \omega = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}.$$

Gli autovalori sono le radici di

$$\lambda^2 + 2\xi\omega_n\lambda + \omega_n^2.$$

Dimostrazione

1. $\alpha = -\xi\omega_n$ è la definizione di ξ . Da $\omega^2 = \omega_n^2 - \alpha^2 = \omega_n^2(1 - \xi^2)$, con $\omega > 0$, segue la seconda formula; poiché $\omega \neq 0$, $\xi^2 < 1$.
2. Gli autovalori $\alpha \pm j\omega$ sono le radici di $(\lambda - \alpha)^2 + \omega^2 = \lambda^2 - 2\alpha\lambda + \alpha^2 + \omega^2 = \lambda^2 + 2\xi\omega_n\lambda + \omega_n^2$.

□

Proposizione – Smorzamento dal polinomio caratteristico

Per un polinomio $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$ con $a_0 > 0$:

$$\omega_n = \sqrt{a_0}, \quad \xi = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0}}.$$

Se $|\xi| < 1$ le radici sono complesse coniugate; se $|\xi| \geq 1$ sono reali.

Dimostrazione

Si confrontano i coefficienti con $\lambda^2 + 2\xi\omega_n\lambda + \omega_n^2$: $\omega_n^2 = a_0$ e $2\xi\omega_n = a_1$. Il discriminante è $a_1^2 - 4a_0 = 4\omega_n^2(\xi^2 - 1)$, negativo solo per $|\xi| < 1$. $\square$

A ω_n fissata, il valore di ξ decide le radici di $\lambda^2 + 2\xi\omega_n\lambda + \omega_n^2$ e quindi i modi (Figura 3):

Smorzamento	Radici	Modi
$\xi > 1$	reali, negative, distinte	due aperiodici convergenti, senza oscillazioni
$\xi = 1$	reale doppia, $-\omega_n$	convergenti, senza oscillazioni
$0 < \xi < 1$	complesse, $\alpha < 0$	pseudoperiodico smorzato: lento per ξ vicino a 0, rapido per ξ vicino a 1
$\xi = 0$	immaginarie, $\pm j\omega_n$	oscillazione di ampiezza costante e pulsazione ω_n ; curva chiusa
$-1 < \xi < 0$	complesse, $\alpha > 0$	pseudoperiodico con oscillazioni amplificate
$\xi = -1$	reale doppia, ω_n	divergenti, senza oscillazioni
$\xi < -1$	reali, positive, distinte	due aperiodici divergenti

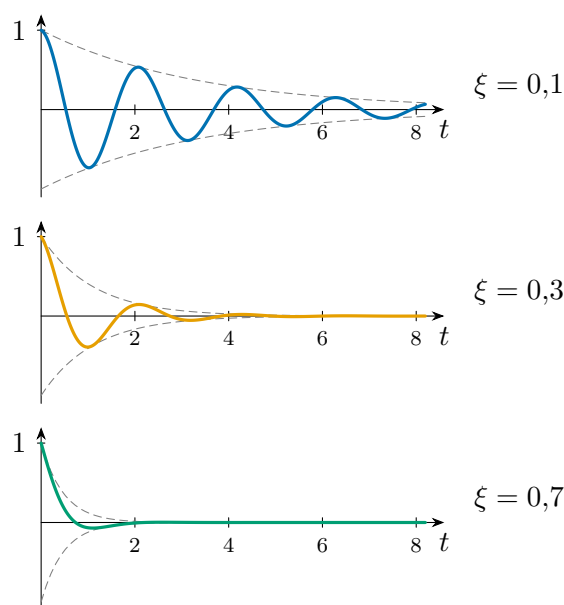


Figura 3: La legge $e^{\alpha t} \cos \omega t$ con $\omega_n = 3$ e tre smorzamenti; in tratteggio l'involuppo $\pm e^{\alpha t}$. Più ξ è vicino a 1, più in fretta l'oscillazione si estingue.

Esempio – I due massa-molla-smorzatore del Capitolo 4

- $M = 1, b = 4, K = 5$: $\lambda^2 + 4\lambda + 5, \omega_n = \sqrt{5}, \xi = 2/\sqrt{5} \approx 0,89$; autovalori $-2 \pm j$, oscillazioni attenuate in fretta.
- $M = 1, b = 3, K = 2$: $\lambda^2 + 3\lambda + 2, \xi = 3/(2\sqrt{2}) \approx 1,06 > 1$; autovalori reali, -1 e -2 .

L'Esercizio 1 calcola modi, costante di tempo e smorzamento di un sistema del terzo ordine e ne traccia la traiettoria.

Riepilogo

- **Costante di tempo**, per $\lambda < 0$: $\tau = -1/\lambda$, con $e^{\lambda t} = e^{-t/\tau}$.
- **Significato di τ** : in un tempo τ il modo convergente si riduce a $1/e$.
- **Pulsazione naturale**: $\omega_n = \sqrt{\alpha^2 + \omega^2}$.
- **Smorzamento**: $\xi = -\alpha/\omega_n$.
- **Formule inverse**, per $|\xi| < 1$: $\alpha = -\xi\omega_n, \omega = \omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$.
- **Polinomio**: $\lambda^2 + 2\xi\omega_n\lambda + \omega_n^2$.
- **Oscillazioni**: solo per $|\xi| < 1$; smorzate se $\xi > 0$, amplificate se $\xi < 0$.

3 Esercizi

Esercizio 1 – Un sistema del terzo ordine

Si consideri il sistema

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} u, \quad y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x.$$

- Tracciare lo schema di simulazione.
- Calcolare i modi naturali e le loro espressioni.
- Tracciare la traiettoria dello stato a partire da $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, con $u = 0$.
- Calcolare la costante di tempo del modo aperiodico, pulsazione naturale e smorzamento di quello pseudoperiodico.

Soluzione a pagina 6 →

Esercizio 2 – Appello del 07/11/2019 (fila A), Prof.ssa Claudia Califano e Prof. Paolo Di Giamberardino, esercizio 1, adattato

Si consideri il sistema

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u, \quad y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} x.$$

- (a) Calcolare autovalori, autovettori e modi naturali dell'evoluzione libera.
- (b) Calcolare la risposta forzata a $u(t) = e^{-t} \delta_{-1}(t - 2)$.

Soluzione a pagina 8 →

Esercizio 3 – Appello del 03/02/2020, Prof.ssa Claudia Califano e Prof. Paolo Di Giamberardino, esercizio 3, adattato

Assegnato il sistema massa-molla-smorzatore rappresentato dalla seguente equazione al secondo ordine

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = u$$

in cui $y = y(t)$ denota la posizione della massa $m > 0$ all'istante $t \geq 0$ e $b, k \geq 0$ sono, rispettivamente, i coefficienti dell'attrito viscoso e della forza elastica

- (a) calcolare un modello lineare e stazionario;
- (b) scegliendo opportunamente i valori dei parametri b , k , m illustrarne i diversi comportamenti calcolando autovalori, autovettori e modi naturali dell'evoluzione libera.

Soluzione a pagina 9 →

Esercizio 4 – Appello del 08/05/2020, Prof.ssa Claudia Califano e Prof. Paolo Di Giamberardino, esercizio 5

Definizione di: costante di tempo, pulsazione naturale e smorzamento.

Soluzione a pagina 10 →

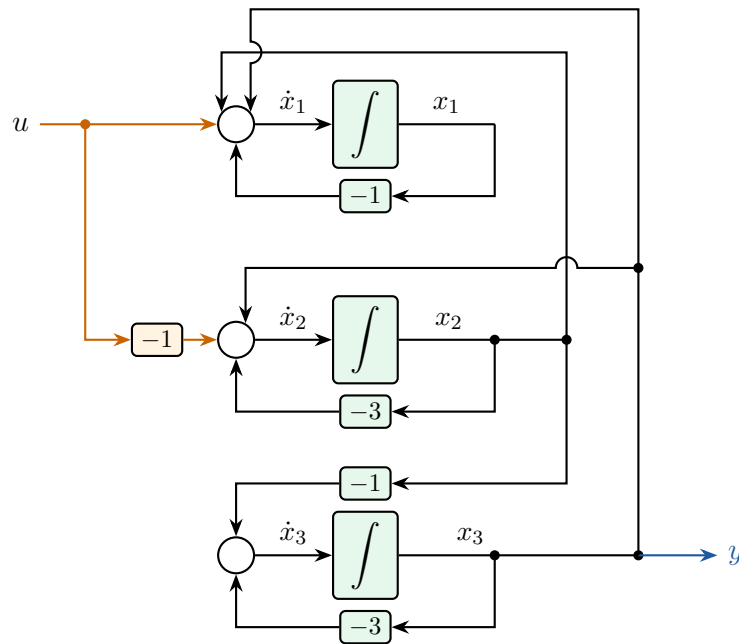
4 Soluzioni

Soluzione dell'Esercizio 1 – Un sistema del terzo ordine

(a) **Equazioni per componenti**, riga per riga:

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2 + x_3 + u, \quad \dot{x}_2 = -3x_2 + x_3 - u, \quad \dot{x}_3 = -x_2 - 3x_3, \quad y = x_3.$$

Tre integratori; davanti a ciascuno un sommatore riceve i termini della sua equazione, con il coefficiente nel blocco (i coefficienti 1 non si disegnano). Il punto pieno è una diramazione: lo stesso segnale va in due direzioni. Dove due collegamenti si incrociano senza toccarsi, uno scavalca l'altro con un piccolo arco.



(b) **Autovalori.** La prima colonna di A è $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$: A è triangolare a blocchi, con $\lambda_1 = -1$ e il blocco $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, già nella forma $\begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix}$: $\lambda_{2,3} = -3 \pm j$, con $\alpha = -3$, $\omega = 1$. Il polinomio caratteristico è $(\lambda + 1)(\lambda^2 + 6\lambda + 10)$.

Autovettori.

- $\lambda_1 = -1$: $Ae_1 = -e_1$, quindi $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- Coppia: con $v_a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ e $v_b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, le sei equazioni di $A(v_a \ v_b) = (v_a \ v_b)\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ (Capitolo 4) sono

$$\begin{aligned} -a_1 + a_2 + a_3 &= -3a_1 - b_1, & -b_1 + b_2 + b_3 &= a_1 - 3b_1, \\ -3a_2 + a_3 &= -3a_2 - b_2, & -3b_2 + b_3 &= a_2 - 3b_2, \\ -a_2 - 3a_3 &= -3a_3 - b_3, & -b_2 - 3b_3 &= a_3 - 3b_3. \end{aligned}$$

Le ultime due righe danno due volte $a_3 = -b_2$ e $a_2 = b_3$; restano $2a_1 + a_2 + a_3 = -b_1$ e $a_1 = 2b_1 + b_2 + b_3$. Si fissano b_2 e b_3 : sostituendo, $5b_1 + b_2 + 3b_3 = 0$.

Con $b_2 = 0$ e $b_3 = 5$, per evitare le frazioni: $a_2 = 5$, $a_3 = 0$, $b_1 = -3$, $a_1 = -1$,

$$v_a = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_b = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Controllo: $Av_a = \begin{pmatrix} 6 \\ -15 \\ -5 \end{pmatrix} = -3v_a - v_b$ e $Av_b = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ -15 \end{pmatrix} = v_a - 3v_b$.

Modi naturali. Un modo aperiodico e uno pseudoperiodico:

$$c_1 e^{-t} v_1, \quad m e^{-3t} [\sin(t + \varphi) v_a + \cos(t + \varphi) v_b],$$

con le leggi temporali e^{-t} , $e^{-3t} \sin t$ ed $e^{-3t} \cos t$. Entrambi vanno a zero.

(c) Coordinate di x_0 . Con $T^{-1} = (v_1 \ v_a \ v_b)$:

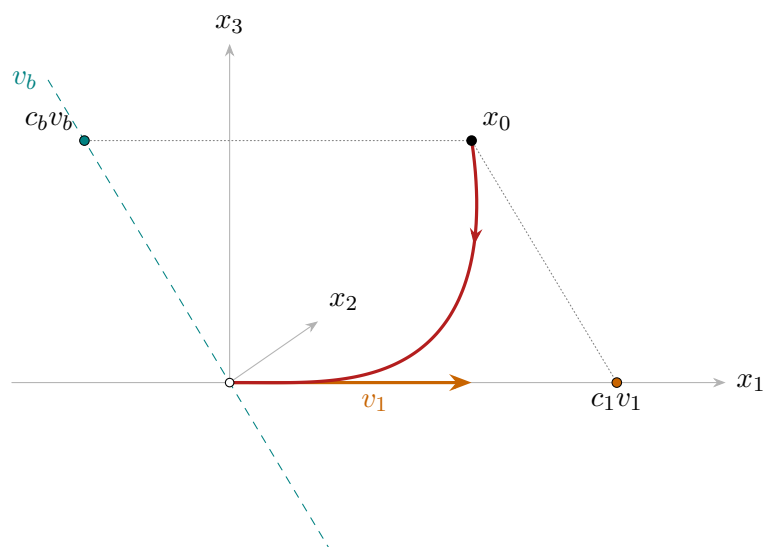
$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Dalle righe di T : $c_1 = w_1^T x_0 = \frac{8}{5}$, $c_a = w_a^T x_0 = 0$, $c_b = w_b^T x_0 = \frac{1}{5}$. Quindi $m = \frac{1}{5}$ e $c_b + j c_a = \frac{1}{5}$ ha fase $\varphi = 0$:

$$x_L(t) = \frac{8}{5} e^{-t} v_1 + \frac{1}{5} e^{-3t} [\sin t v_a + \cos t v_b] = \begin{pmatrix} \frac{8}{5} e^{-t} - \frac{1}{5} e^{-3t} (\sin t + 3 \cos t) \\ e^{-3t} \sin t \\ e^{-3t} \cos t \end{pmatrix}.$$

Controllo: $x_L(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Traiettoria. $x_0 = c_1 v_1 + c_b v_b$: la componente lungo v_1 , l'asse x_1 , parte da $\frac{8}{5}$ e decade come e^{-t} ; quella nel piano di v_a e v_b parte da $c_b v_b$ e gira verso l'origine con l'involuppo e^{-3t} , più rapido. La traiettoria si porta in fretta sull'asse x_1 e arriva all'origine lungo di esso (figura).



(d) Parametri. Il modo aperiodico ha costante di tempo $\tau = -1/\lambda_1 = 1$. Per la coppia $-3 \pm j$:

$$\omega_n = \sqrt{9+1} = \sqrt{10} \approx 3,16, \quad \xi = \frac{3}{\sqrt{10}} \approx 0,95.$$

Lo smorzamento è vicino a 1: $x_3 = e^{-3t} \cos t$ cambia segno in $t = \pi/2$, quando l'involuppo vale $e^{-3\pi/2} \approx 0,009$, e nella figura l'oscillazione non si vede. Dal polinomio $\lambda^2 + 6\lambda + 10$, con la proposizione della Sezione 2: $\omega_n = \sqrt{10}$ e $\xi = 6/(2\sqrt{10})$, lo stesso valore.

[← Torna all'Esercizio 1, pagina 4](#)

Soluzione dell'Esercizio 2 – Appello del 07/11/2019 (fila A), Prof.ssa Claudia Califano e Prof. Paolo Di Giamberardino, esercizio 1, adattato

(a) Autovalori. La prima riga di A è $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$: $\lambda_1 = -1$ e gli autovalori del blocco $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$, radici di $\lambda^2 + 2\lambda + 2$: $-1 \pm j$, con $\alpha = -1$, $\omega = 1$.

Autovettori.

- $\lambda_1 = -1$: $(A + I)v = 0$ dà $v_2 + v_3 = 0$ e $v_1 - 2v_2 - v_3 = 0$, quindi $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
- Coppia: da $A \begin{pmatrix} v_a \\ v_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_a \\ v_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ le prime righe danno $a_1 = b_1 = 0$, le altre $a_2 = b_2 + b_3$ e $a_3 = -2b_2 - b_3$. Con $b_2 = 0$, $b_3 = 1$: $v_a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Controllo: $Av_a = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -v_a - v_b$, $Av_b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = v_a - v_b$.

Modi naturali. L'evoluzione libera è

$$x_L(t) = c_1 e^{-t} v_1 + m e^{-t} [\sin(t + \varphi) v_a + \cos(t + \varphi) v_b] :$$

un modo aperiodico lungo v_1 , con costante di tempo $\tau = 1$, e uno pseudoperiodico nel piano di v_a e v_b , con $\omega_n = \sqrt{2}$ e $\xi = 1/\sqrt{2} \approx 0,71$. Entrambi vanno a zero.

(b) Risposte impulsive. $B = v_b$: le coordinate di B sono $c_1 = c_a = 0$, $c_b = 1$, quindi $m = 1$, $\varphi = 0$ e

$$H(t) = e^{At} B = e^{-t} [\sin t v_a + \cos t v_b], \quad W(t) = C H(t) = e^{-t} \cos t,$$

perché $Cv_a = 0$ e $Cv_b = 1$; $D = 0$.

Risposta forzata. L'ingresso è nullo prima di $t = 2$, quindi lo è anche la risposta. Per $t \geq 2$, con $e^{-(t-\tau)}e^{-\tau} = e^{-t}$:

$$\begin{aligned}x_F(t) &= \int_2^t H(t-\tau) e^{-\tau} d\tau = e^{-t} \int_2^t [\sin(t-\tau) v_a + \cos(t-\tau) v_b] d\tau \\&= e^{-t} [(1 - \cos(t-2)) v_a + \sin(t-2) v_b], \\y_F(t) &= C x_F(t) = e^{-t} \sin(t-2).\end{aligned}$$

[← Torna all'Esercizio 2, pagina 5](#)

Soluzione dell'Esercizio 3 – Appello del 03/02/2020, Prof.ssa Claudia Califano e Prof. Paolo Di Giamberardino, esercizio 3, adattato

(a) Con $x_1 = y$ e $x_2 = \dot{y}$:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} u, \quad y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x.$$

(b) Gli autovalori sono le radici di $\lambda^2 + \frac{b}{m}\lambda + \frac{k}{m}$. Per $k > 0$, con la proposizione sul polinomio caratteristico,

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \xi = \frac{b/m}{2\sqrt{k/m}} = \frac{b}{2\sqrt{mk}}.$$

In forma compagna l'autovettore di λ è $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$ (prima riga di $(A - \lambda I)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$: $-\lambda a_1 + a_2 = 0$). Con $m = 1$ e coefficienti iniziali c nella base indicata; per le coppie, $\rho = \sqrt{c_a^2 + c_b^2}$ e φ sono ampiezza e fase del Capitolo 4, qui chiamate così perché m è la massa:

- $k = 10, b = 0$: $\xi = 0$, autovalori $\pm j\sqrt{10}$. Da $v = \begin{pmatrix} 1 \\ j\sqrt{10} \end{pmatrix}$, $v_a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_b = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{10} \end{pmatrix}$; un modo pseudoperiodico di ampiezza costante, $\rho[\sin(\sqrt{10}t + \varphi) v_a + \cos(\sqrt{10}t + \varphi) v_b]$: se $\rho > 0$ il carrello oscilla per sempre e la traiettoria è un'ellisse.
- $k = 10, b = 2$: $\omega_n = \sqrt{10}$, $\xi = 1/\sqrt{10} \approx 0,32$, autovalori $-1 \pm 3j$. Da $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1+3j \end{pmatrix}$, $v_a = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$; un modo pseudoperiodico convergente, $\rho e^{-t}[\sin(3t + \varphi) v_a + \cos(3t + \varphi) v_b]$: se $\rho > 0$ oscilla e si ferma, su una spirale convergente.
- $k = 4, b = 4$: $\xi = 1$, autovalore -2 doppio con il solo autovettore $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Da $(A + 2I) v_g = v$, $v_g = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; con il blocco di Jordan (Capitolo 4)

$$x_L(t) = e^{-2t}[(c_1 + t c_2) v + c_2 v_g] :$$

convergente, senza oscillazioni.

- $k = 4, b = 5$: $\xi = 1,25$, autovalori -1 e -4 , autovettori $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$; due modi aperiodici convergenti, $c_1 e^{-t} v_1$ e $c_2 e^{-4t} v_2$, con $\tau = 1$ e $\tau = 0,25$.
- $k = 0$: autovalori 0 e $-b$. Con $b > 0$, un modo costante lungo $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e uno aperiodico convergente lungo $\begin{pmatrix} 1 \\ -b \end{pmatrix}$: il carrello si ferma in una posizione qualsiasi. Con anche $b = 0$, l'autovalore 0 è doppio con il solo autovettore $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_g = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $x_L(t) = (c_1 + t c_2) v + c_2 v_g$: la posizione varia linearmente con pendenza c_2 , la velocità iniziale, ed è costante se $c_2 = 0$.

[← Torna all'Esercizio 3, pagina 5](#)

Soluzione dell'Esercizio 4 – Appello del 08/05/2020, Prof.ssa Claudia Califano e Prof. Paolo Di Giamberardino, esercizio 5

Costante di tempo. Per un modo aperiodico $c e^{\lambda t} v$ con $\lambda < 0$, $\tau = -1/\lambda$, così che $e^{\lambda t} = e^{-t/\tau}$: in un tempo τ il modo si riduce a $1/e$ del valore iniziale. Più τ è piccola, più il modo è rapido.

Pulsazione naturale e smorzamento. Per un modo pseudoperiodico con autovalori $\alpha \pm j\omega$:

$$\omega_n = \sqrt{\alpha^2 + \omega^2}, \quad \xi = -\frac{\alpha}{\omega_n}.$$

Per $\alpha < 0$, $\xi = \sin \theta$, con θ l'angolo fra il semiasse immaginario positivo e il segmento dall'origine ad $\alpha + j\omega$. Viceversa $\alpha = -\xi \omega_n$ e $\omega = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$, con $|\xi| < 1$. Con $\xi = 0$ il modo oscilla con ampiezza costante e pulsazione ω_n ; per $0 < \xi < 1$ le oscillazioni si attenuano: a ω_n fissata, tanto più in fretta quanto più ξ è vicino a 1; con $-1 < \xi < 0$ crescono.

[← Torna all'Esercizio 4, pagina 5](#)