

Appunti di Sistemi Dinamici

Canale 2 · Prof.ssa Claudia Califano

Capitolo 6: Eccitabilità e osservabilità dei modi

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dalle lezioni in aula e dal materiale del corso

Argomenti: Modi e stato iniziale · Eccitabilità con impulsi in ingresso
Osservabilità in uscita · I modi nella risposta impulsiva W
Un modo divergente che l'uscita non mostra

Indice

1	I modi e lo stato iniziale	1
2	Eccitabilità: i modi nella risposta forzata dello stato	1
3	Osservabilità: i modi nell'evoluzione libera dell'uscita	2
4	I modi nella risposta impulsiva in uscita	3
5	Un modo divergente che l'uscita non mostra	5
6	Esercizi	6
7	Soluzioni	8

1 I modi e lo stato iniziale

Si usano notazione e risultati del Capitolo 4: A diagonalizzabile, con μ autovalori reali λ_i e ν coppie $\alpha_k \pm j\omega_k$; autovettori destri v_i, v_{ka}, v_{kb} (colonne di T^{-1}) e sinistri w_i, w_{ka}, w_{kb} (righe di T), con

$$e^{At} = \sum_{i=1}^{\mu} e^{\lambda_i t} v_i w_i^T + \sum_{k=1}^{\nu} e^{\alpha_k t} \left[\cos \omega_k t (v_{ka} w_{ka}^T + v_{kb} w_{kb}^T) + \sin \omega_k t (v_{ka} w_{kb}^T - v_{kb} w_{ka}^T) \right].$$

Da uno stato iniziale generico l'evoluzione libera contiene tutti i modi naturali. Scegliendo x_0 si possono sollecitarne solo alcuni:

- con $x_0 = c_1 v_1$ resta il solo modo aperiodico $c_1 e^{\lambda_1 t} v_1$;
- con $x_0 = c_{1a} v_{1a}$ e $c_{1a} \neq 0$ resta il solo primo modo pseudoperiodico, con $m_1 = |c_{1a}|$: il moto parte da x_0 ma si svolge in tutto il piano di v_{1a} e v_{1b} .

Un modo pseudoperiodico è uno solo per la coppia: i due autovalori coniugati non si separano.

Nelle sezioni seguenti la matrice B prende il posto di x_0 , e C decide che cosa arriva in uscita.

2 Eccitabilità: i modi nella risposta forzata dello stato

Definizione – Modo eccitabile

Un modo naturale è **eccitabile con impulsi in ingresso** se la sua legge temporale compare nella matrice delle risposte impulsive nello stato $H(t) = e^{At} B$.

Proposizione – Criterio di eccitabilità

Siano gli autovalori semplici.

- Il modo aperiodico di λ_i è eccitabile se e solo se

$$w_i^T B \neq \mathbf{0}^T.$$

- Il modo pseudoperiodico della coppia k è eccitabile se e solo se

$$w_{ka}^T B \neq \mathbf{0}^T \quad \text{oppure} \quad w_{kb}^T B \neq \mathbf{0}^T.$$

Dimostrazione

1. Dalla forma spettrale,

$$H(t) = \sum_{i=1}^{\mu} e^{\lambda_i t} v_i (w_i^T B) + \sum_{k=1}^{\nu} e^{\alpha_k t} \left[\cos \omega_k t (v_{ka} w_{ka}^T B + v_{kb} w_{kb}^T B) + \sin \omega_k t (v_{ka} w_{kb}^T B - v_{kb} w_{ka}^T B) \right].$$

2. Un termine reale manca se e solo se $v_i (w_i^T B) = 0$, cioè $w_i^T B = \mathbf{0}^T$, perché $v_i \neq \mathbf{0}$.
3. Se $w_{ka}^T B$ e $w_{kb}^T B$ sono nulle, il termine della coppia manca. Viceversa, se manca, è nullo il coefficiente del coseno, $v_{ka} w_{ka}^T B + v_{kb} w_{kb}^T B$; poiché v_{ka} e v_{kb} sono indipendenti, le due righe sono nulle.

□

B ha il ruolo di x_0 nell'evoluzione libera: un impulso sull'ingresso i dà la colonna i di H (Capitolo 3), cioè l'evoluzione libera dallo stato Be_i .

- Un modo non eccitabile non compare in $x_F(t) = \int_0^t H(t - \tau) u(\tau) d\tau$ per *nessun* ingresso, non solo per l'impulso.
- Il modo appartiene al sistema, ma agendo sull'ingresso non lo si può sollecitare né modificare.

3 Osservabilità: i modi nell'evoluzione libera dell'uscita

Definizione – Modo osservabile

Un modo naturale è **osservabile in uscita** se la sua legge temporale compare nella matrice di trasformazione dell'uscita $\Psi(t) = Ce^{At}$.

Proposizione – Criterio di osservabilità

Siano gli autovalori semplici.

- Il modo aperiodico di λ_i è osservabile se e solo se

$$C v_i \neq \mathbf{0}.$$

- Il modo pseudoperiodico della coppia k è osservabile se e solo se

$$C v_{ka} \neq \mathbf{0} \quad \text{oppure} \quad C v_{kb} \neq \mathbf{0}.$$

Dimostrazione

$\Psi(t) = C e^{At}$ ha la forma spettrale di e^{At} con C a sinistra: i coefficienti sono $(C v_i) w_i^\top$ e, per il coseno della coppia, $(C v_{ka}) w_{ka}^\top + (C v_{kb}) w_{kb}^\top$. Come per l'eccitabilità, $w_i \neq \mathbf{0}$; se il coefficiente del coseno è nullo, moltiplicandolo a destra per v_{ka} e per v_{kb} , per la base duale, restano $C v_{ka} = \mathbf{0}$ e $C v_{kb} = \mathbf{0}$. $\square$

Un modo non osservabile manca in $y_L(t) = \Psi(t) x_0$ *qualunque* sia lo stato iniziale: c'è, ma le misure dell'uscita non lo mostrano.

Il rischio è nell'identificazione della scatola nera (Capitolo 3): si applicano ingressi, si misura l'uscita e si ricava un modello. Un modo che non arriva in uscita sfugge al modello, anche se è divergente.

4 I modi nella risposta impulsiva in uscita

Teorema – Modi della risposta ingresso-uscita

Con autovalori semplici, nella matrice delle risposte impulsive in uscita

$$W(t) = C e^{At} B + D \delta(t)$$

compaiono **tutti e soli i modi eccitabili e osservabili**. $D \delta(t)$ è il legame diretto fra ingresso e uscita e non contiene modi.

Dimostrazione

1. Il termine di λ_i in $Ce^{At}B$ è $e^{\lambda_i t}(Cv_i)(w_i^T B)$: una colonna per una riga, nullo se e solo se uno dei due fattori è nullo.
2. Per la coppia k (si omette l'indice), i coefficienti del coseno e del seno sono

$$P = Cv_a w_a^T B + Cv_b w_b^T B, \quad Q = Cv_a w_b^T B - Cv_b w_a^T B.$$

Se il modo non è eccitabile o non è osservabile, $P = Q = 0$.

3. Viceversa, sviluppando il prodotto con $j^2 = -1$,

$$P + jQ = (Cv_a - jCv_b)(w_a^T B + jw_b^T B).$$

Se il modo è eccitabile e osservabile, i due fattori sono una colonna e una riga non nulle: il prodotto non è nullo, quindi P o Q non è nullo.

□

Matrice	Che cosa descrive	Modi presenti
e^{At}	evoluzione libera dello stato	tutti
$H(t) = e^{At}B$	risposta forzata dello stato	gli eccitabili
$\Psi(t) = Ce^{At}$	evoluzione libera dell'uscita	gli osservabili
$W(t) = Ce^{At}B + D\delta(t)$	risposta forzata dell'uscita	gli eccitabili e osservabili

Osservazione – Autovalori ripetuti

Se un autovalore ripetuto ha molteplicità algebrica e geometrica uguali, i prodotti $w_i^T B$ e Cv_i dipendono dagli autovettori scelti, e i termini con la stessa legge si sommano in W . Con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

per $\lambda = 1$, si ha $w_1^T B = 1$, $w_2^T B = -1$, $Cv_1 = Cv_2 = 1$: i due termini passano il test, ma si cancellano, e $W(t) = e^{2t}$. Il teorema vale per autovalori semplici.

5 Un modo divergente che l'uscita non mostra

Esempio – Tre modi, uno solo in uscita

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = 0.$$

A è triangolare: $\lambda_1 = 0$ (modo limitato), $\lambda_2 = -1$ (convergente), $\lambda_3 = 2$ (divergente).
Dalle righe di $(A - \lambda I)v = 0$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

	$\lambda_1 = 0$	$\lambda_2 = -1$	$\lambda_3 = 2$
$w_i^\top B$	-1	1	0
eccitabile	sì	sì	no
Cv_i	0	1	1
osservabile	no	sì	sì

Senza altri conti, dalla forma spettrale restano solo i termini con prodotti non nulli:

$$H(t) = -v_1 + e^{-t}v_2 = \begin{pmatrix} e^{-t} - 1 \\ e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi(t) = e^{-t}w_2^\top + e^{2t}w_3^\top = \begin{pmatrix} 0 & e^{-t} & e^{2t} - e^{-t} \end{pmatrix},$$

$$W(t) = (Cv_2)(w_2^\top B)e^{-t} = e^{-t}.$$

Un esperimento ingresso-uscita mostra solo e^{-t} , che va a zero: il sistema sembra tranquillo. Dentro c'è il modo e^{2t} , che da uno stato iniziale con $c_3 \neq 0$ fa divergere lo stato e l'uscita, e il modo costante di $\lambda_1 = 0$.

Riepilogo

- **Stato iniziale:** x_0 lungo v_i , o nel piano di v_{ka}, v_{kb} , sollecita un solo modo.
- **Eccitabile:** legge in $H = e^{At}B$; $w_i^T B \neq \mathbf{0}^T$, per una coppia $w_{ka}^T B$ o $w_{kb}^T B$ non nulla.
- **Osservabile:** legge in $\Psi = Ce^{At}$; $Cv_i \neq \mathbf{0}$, per una coppia Cv_{ka} o Cv_{kb} non nullo.
- **Risposta impulsiva in uscita:** W contiene tutti e soli i modi eccitabili e osservabili.
- **Ipotesi:** autovalori semplici; con autovalori ripetuti i test dipendono dagli autovettori.
- **Identificazione:** da W non si vedono i modi non eccitabili o non osservabili, anche divergenti.

6 Esercizi

Esercizio 1 – Esonero del 13/11/2023 (variante B), Canale 2, Prof.ssa Claudia Califano, esercizio 1, adattato

Si consideri il sistema descritto da

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t), \quad y(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x(t).$$

- b. Effettuare l'analisi modale discutendo le proprietà di eccitabilità ed osservabilità dei modi.

Soluzione a pagina 8 →

Esercizio 2 – Appello del 08/01/2025, Canale 2, Prof.ssa Claudia Califano, esercizio 1, adattato

Si consideri il sistema

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} u(t), \quad y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} x(t).$$

- a. Determinarne i modi naturali e le loro proprietà di eccitabilità ed osservabilità.

Soluzione a pagina 8 →

7 Soluzioni

Soluzione dell'Esercizio 1 – Esonero del 13/11/2023 (variante B), Canale 2, Prof.ssa Claudia Califano, esercizio 1, adattato

Autovalori. Il blocco $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ha la forma $\begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix}$: autovalori $2 \pm j$; l'ultima riga dà $\lambda_3 = -1$.

Autovettori. Per $2 + j$: $v = \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ 0 \end{pmatrix}$, quindi $v_a = e_1$, $v_b = e_2$. Per -1 : $(A + I)v = 0$ dà $3a + b + c = 0$ e $-a + 3b + c = 0$, quindi $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$. Con $T^{-1} = (v_a \ v_b \ v_3)$:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Modi naturali. Un modo pseudoperiodico divergente nel piano x_1x_2 , $m e^{2t} [\sin(t + \varphi) v_a + \cos(t + \varphi) v_b]$, e un modo aperiodico convergente $c_3 e^{-t} v_3$.

Eccitabilità, dalle righe di T per B : $w_a^T B = 1$, $w_b^T B = 1$, $w_3^T B = 0$. Il modo pseudoperiodico è eccitabile, quello aperiodico no:

$$H(t) = e^{2t} [\cos t (v_a + v_b) + \sin t (v_a - v_b)] = e^{2t} \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ \cos t - \sin t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Osservabilità. $Cv_a = 0$, $Cv_b = 0$, $Cv_3 = -5$: il modo pseudoperiodico non è osservabile, quello aperiodico sì, e $\Psi(t) = e^{-t}(Cv_3) w_3^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$.

Risposta impulsiva in uscita. Nessun modo è insieme eccitabile e osservabile, e $D = 0$: $W(t) = 0$. L'ingresso fa divergere lo stato nel piano x_1x_2 , ma l'uscita $y = x_3$ non ne risente.

[← Torna all'Esercizio 1, pagina 6](#)

Soluzione dell'Esercizio 2 – Appello del 08/01/2025, Canale 2, Prof.ssa Claudia Califano, esercizio 1, adattato

Autovalori. La prima colonna è $-3e_1$: $\lambda_1 = -3$, e il blocco $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ ha polinomio $\lambda^2 + 4$, con radici $\pm 2j$: $\alpha = 0$, $\omega = 2$.

Autovettori. $v_1 = e_1$. Per $2j$, dalle ultime due righe di $(A - 2jI)v = \mathbf{0}$ e poi dalla prima, con $c = 3 + 2j$:

$$v = \begin{pmatrix} 2 + 2j \\ 1 - 8j \\ 3 + 2j \end{pmatrix}, \quad v_a = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_b = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad T = \frac{1}{26} \begin{pmatrix} 26 & 2 & -18 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Controllo: $Av_a = -2v_b$ e $Av_b = 2v_a$.

Modi naturali. Un modo aperiodico convergente $c_1 e^{-3t} v_1$ e un modo pseudoperiodico di ampiezza costante $m[\sin(2t + \varphi) v_a + \cos(2t + \varphi) v_b]$, su una curva chiusa nel piano di v_a e v_b .

Eccitabilità. $TB = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ -1/2 \end{pmatrix}$: $w_1^T B = 0$, quindi il modo aperiodico non è eccitabile; $w_a^T B = 1 \neq 0$, quindi il modo pseudoperiodico è eccitabile.

Osservabilità. $Cv_1 = 1$, $Cv_a = 5$, $Cv_b = 4$: entrambi i modi sono osservabili.

Conseguenza. In W compare solo il modo pseudoperiodico, l'unico eccitabile e osservabile:

$$W(t) = \cos 2t (5 \cdot 1 + 4 \cdot (-\frac{1}{2})) + \sin 2t (5 \cdot (-\frac{1}{2}) - 4 \cdot 1) = 3 \cos 2t - \frac{13}{2} \sin 2t.$$

[← Torna all'Esercizio 2, pagina 7](#)