

Appunti di Sistemi Dinamici

Canale 2 · Prof.ssa Claudia Califano

Capitolo 7: Sistemi a tempo discreto

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dalle lezioni in aula e dal materiale del corso

Argomenti: Equazioni alle differenze · Schema di simulazione con ritardi

Soluzione e rappresentazione esplicita · Matrici Φ , H , Ψ , W

Potenze di A · Blocco complesso in forma polare

Modi aperiodici, alternanti e pseudoperiodici · Autovalore nullo

Indice

1	La rappresentazione implicita	1
2	La soluzione e la rappresentazione esplicita	1
3	Le potenze di A	3
4	I modi naturali a tempo discreto	5
5	Esercizi	7
6	Soluzioni	9

1 La rappresentazione implicita

Definizione – Sistema lineare stazionario a tempo discreto

Con $k \in \mathbb{Z}$, $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $u(k) \in \mathbb{R}^m$, $y(k) \in \mathbb{R}^p$:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A x(k) + B u(k) \\ y(k) &= C x(k) + D u(k) \end{aligned}$$

La prima è un'**equazione alle differenze**: è una legge ricorsiva, che dà lo stato al passo successivo da stato e ingresso al passo attuale.

Lo schema di simulazione è quello del Capitolo 1 con un **ritardo** al posto dell'integratore: il ritardo riceve $x(k+1)$ e restituisce $x(k)$ (Figura 1). Lo schema componente per componente si disegna allo stesso modo.

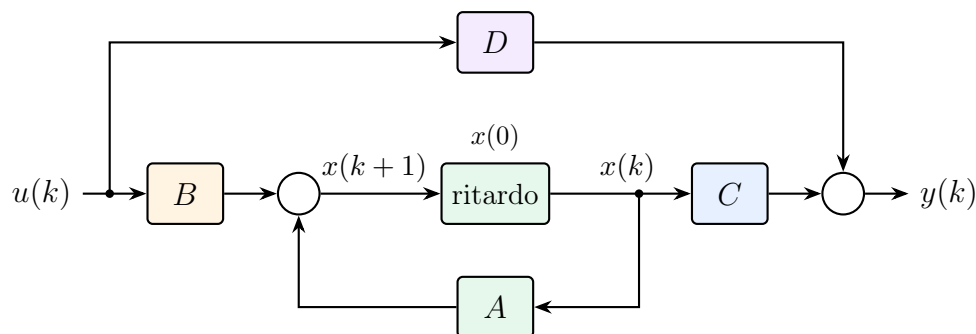


Figura 1: Schema di simulazione a tempo discreto: il ritardo prende il posto dell'integratore.

2 La soluzione e la rappresentazione esplicita

Teorema – Soluzione a tempo discreto

Con $x(0) = x_0$, per $k \geq 0$:

$$\begin{aligned} x(k) &= A^k x_0 + \sum_{\tau=0}^{k-1} A^{k-1-\tau} B u(\tau) \\ y(k) &= C A^k x_0 + \sum_{\tau=0}^{k-1} C A^{k-1-\tau} B u(\tau) + D u(k) \end{aligned}$$

con la somma vuota, cioè nulla, per $k = 0$.

Dimostrazione

1. Applicando la legge ricorsiva e sostituendo ogni volta il passo precedente:

$$x(1) = Ax_0 + Bu(0),$$

$$x(2) = Ax(1) + Bu(1) = A^2x_0 + ABu(0) + Bu(1),$$

$$x(3) = Ax(2) + Bu(2) = A^3x_0 + A^2Bu(0) + ABu(1) + Bu(2) :$$

l'ingresso $u(\tau)$ arriva a $x(k)$ moltiplicato per $A^{k-1-\tau}B$.

2. Per induzione: la formula vale per $k = 0$; se vale per k ,

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) = A^{k+1}x_0 + \sum_{\tau=0}^{k-1} A^{k-\tau}B u(\tau) + Bu(k),$$

e l'ultimo termine è quello con $\tau = k$ della somma fino a k .

3. $y(k) = Cx(k) + Du(k)$.

□

Definizione – Matrici della rappresentazione esplicita

$\Phi(k) = A^k$	matrice di transizione
$H(k) = A^{k-1}B, \quad k \geq 1$	matrice delle risposte impulsive nello stato
$\Psi(k) = CA^k$	matrice di trasformazione dell'uscita
$W(k) = \begin{cases} D, & k = 0 \\ CA^{k-1}B, & k \geq 1 \end{cases}$	matrice delle risposte impulsive in uscita

Proposizione – Rappresentazione esplicita a tempo discreto

$$\begin{aligned} x(k) &= \Phi(k)x_0 + \sum_{\tau=0}^{k-1} H(k-\tau)u(\tau) \\ y(k) &= \Psi(k)x_0 + \sum_{\tau=0}^k W(k-\tau)u(\tau) \end{aligned}$$

Dimostrazione

È il teorema con le matrici della definizione: $A^{k-1-\tau}B = H(k-\tau)$ per $\tau \leq k-1$; nella seconda somma il termine $\tau = k$ è $W(0)u(k) = Du(k)$. □

Come a tempo continuo (Capitolo 3), il primo termine è l'**evoluzione libera** e la somma l'**evoluzione forzata**, una somma di convoluzione al posto dell'integrale. Con l'**impulso** discreto $\delta(k)$, uguale a 1 per $k = 0$ e a 0 altrimenti, e $x_0 = \mathbf{0}$, l'ingresso $u(k) = e_i \delta(k)$ dà

$$x(k) = H(k) e_i \quad (k \geq 1), \quad y(k) = W(k) e_i \quad (k \geq 0) :$$

le colonne di H e W sono risposte a impulsi, da cui i nomi.

	Tempo continuo	Tempo discreto
equazione di stato	$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$	$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$
blocco dello schema	integratore	ritardo
Φ	e^{At}	A^k
H	$e^{At}B$	$A^{k-1}B, k \geq 1$
Ψ	Ce^{At}	CA^k
W	$Ce^{At}B + D\delta(t)$	D in $k = 0$; $CA^{k-1}B, k \geq 1$
forzata	integrale di convoluzione	somma di convoluzione

3 Le potenze di A

Proposizione – Potenza e cambio di coordinate

Se $\tilde{A} = TAT^{-1}$ è diagonale a blocchi, $\tilde{A} = \text{diag}(A_1, \dots, A_r)$,

$$A^k = T^{-1} \tilde{A}^k T, \quad \tilde{A}^k = \text{diag}(A_1^k, \dots, A_r^k).$$

Si usa la base degli autovettori del Capitolo 4: un autovalore reale λ dà il blocco 1×1 con potenza λ^k ; resta il blocco reale 2×2 di una coppia $\alpha \pm j\omega$, $\omega > 0$.

Proposizione – Potenza del blocco di una coppia complessa

Scritto $\alpha + j\omega = \sigma e^{j\theta}$ in forma polare,

$$\sigma = \sqrt{\alpha^2 + \omega^2}, \quad \alpha = \sigma \cos \theta, \quad \omega = \sigma \sin \theta,$$

per ogni intero $k \geq 0$

$$\begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix}^k = \sigma^k \begin{pmatrix} \cos k\theta & \sin k\theta \\ -\sin k\theta & \cos k\theta \end{pmatrix}$$

Dimostrazione

Il blocco è $\sigma R(\theta)$, con $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$; poiché σ è uno scalare, $(\sigma R(\theta))^k = \sigma^k R(\theta)^k$. Si dimostra $R(\theta)^k = R(k\theta)$ per induzione.

1. **Base:** per $k = 0$, $R(0) = I$; per $k = 1$ è la definizione.
2. **Passo:** se $R(\theta)^{k-1} = R((k-1)\theta)$, allora $R(\theta)^k = R((k-1)\theta) R(\theta)$. Con $a = (k-1)\theta$ la prima riga del prodotto è

$$(\cos a \cos \theta - \sin a \sin \theta, \cos a \sin \theta + \sin a \cos \theta) = (\cos k\theta, \sin k\theta)$$

per le formule di addizione; la seconda, allo stesso modo, è $(-\sin k\theta, \cos k\theta)$. Quindi $R(\theta)^k = R(k\theta)$.

□

Il blocco reale ha la stessa forma dell'esponenziale del Capitolo 4: σ^k prende il posto di $e^{\alpha t}$ e l'angolo $k\theta$ quello di ωt . A ogni passo il vettore ruota di θ , la fase dell'autovalore, e si allunga di σ , il suo modulo.

Teorema – Forma spettrale della potenza

Sia A diagonalizzabile con μ autovalori reali λ_i e ν coppie $\alpha_h \pm j\omega_h = \sigma_h e^{\pm j\theta_h}$, con autovettori come nel Capitolo 4. Per $k \geq 0$ (con $0^0 = 1$):

$$A^k = \sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i^k v_i w_i^T + \sum_{h=1}^{\nu} \sigma_h^k \left[\cos k\theta_h (v_{ha} w_{ha}^T + v_{hb} w_{hb}^T) + \sin k\theta_h (v_{ha} w_{hb}^T - v_{hb} w_{ha}^T) \right]$$

Dimostrazione

È la dimostrazione della forma spettrale nel caso generale del Capitolo 4, con $\tilde{A}^k$ al posto di $e^{\tilde{A}t}$: i blocchi 1×1 danno λ_i^k , quelli delle coppie la proposizione precedente.

□

4 I modi naturali a tempo discreto

Proposizione – Modi naturali a tempo discreto

Con $c_i = w_i^T x_0$ e m_h, φ_h modulo e fase di $w_{hb}^T x_0 + j w_{ha}^T x_0$, come nel Capitolo 4:

$$x_L(k) = A^k x_0 = \sum_{i=1}^{\mu} c_i \lambda_i^k v_i + \sum_{h=1}^{\nu} m_h \sigma_h^k [\sin(k\theta_h + \varphi_h) v_{ha} + \cos(k\theta_h + \varphi_h) v_{hb}]$$

Ogni autovalore reale dà un modo lungo la retta di v_i , ogni coppia un modo nel piano di v_{ha} e v_{hb} .

Dimostrazione

Si applica la forma spettrale della potenza a x_0 e si procede come per la proposizione “Modi naturali” del Capitolo 4, con $k\theta_h$ al posto di $\omega_k t$ e σ_h^k al posto di $e^{\alpha_k t}$. $\square$

Definizione – Modi aperiodici, alternanti, pseudoperiodici

A tempo discreto i modi naturali sono di tre tipi:

- **aperiodico**, per un autovalore reale positivo: λ^k ha sempre lo stesso segno;
- **alternante**, per un autovalore reale negativo: λ^k cambia segno a ogni passo;
- **pseudoperiodico**, per una coppia complessa coniugata.

Proposizione – Il modulo decide

Un modo naturale, con $|\lambda|$ il modulo dell’autovalore (σ per una coppia):

- **diverge** se $|\lambda| > 1$;
- **converge** a zero se $|\lambda| < 1$;
- resta **limitato** se $|\lambda| = 1$: costante per $\lambda = 1$, alterna fra due valori opposti per $\lambda = -1$, ruota con ampiezza costante per $\sigma = 1$.

La legge λ^k ha modulo $|\lambda|^k$, che cresce, tende a zero o resta 1; nel modo pseudoperiodico seno e coseno sono limitati e conta solo σ^k . Con $\lambda = -2$ i valori $1, -2, 4, -8, \dots$ si allontanano dall’origine alternando il segno; con $\lambda = \pm \frac{1}{2}$ si avvicinano a zero (Figura 2).

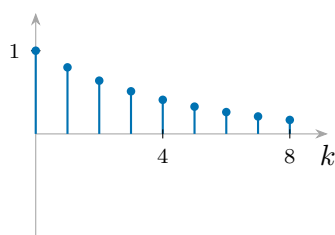
Proposizione – Autovalore nullo

Un autovalore $\lambda_i = 0$ dà un modo che si annulla in un numero finito di passi: il termine $c_i \lambda_i^k v_i$ vale $c_i v_i$ in $k = 0$ e 0 per ogni $k \geq 1$.

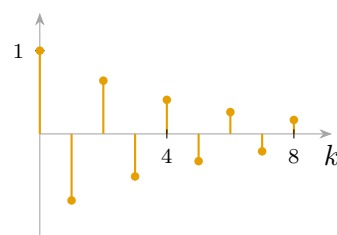
Come a tempo continuo (Capitolo 6), con $x_0 = c_i v_i$ l'evoluzione libera contiene il solo modo di λ_i (Esercizio 1).

Osservazione – Il confronto con il tempo continuo

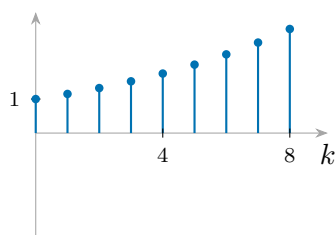
- A tempo continuo decide il segno della parte reale, a tempo discreto il modulo: il confine è il cerchio $|\lambda| = 1$, non l'asse immaginario.
- Un modo pseudoperiodico a tempo discreto converge se $\sigma < 1$, qualunque sia il segno di α .
- Il modo alternante e il modo che si annulla in un numero finito di passi non hanno un analogo a tempo continuo, dove $e^{\lambda t} > 0$.



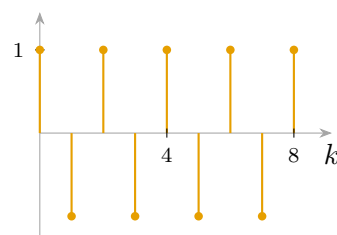
$\lambda = 0,8$: aperiodico, converge



$\lambda = -0,8$: alternante, converge



$\lambda = 1,15$: aperiodico, diverge



$\lambda = -1$: alternante, limitato

Figura 2: Le leggi λ^k di modi aperiodici e alternanti: conta il modulo di λ , il segno decide se il valore alterna. Nel terzo pannello la scala verticale è ridotta.

Riepilogo

- **Modello:** $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$, $y(k) = Cx(k) + Du(k)$; nello schema il ritardo sostituisce l'integratore.
- **Soluzione:** $x(k) = A^k x_0 + \sum_{\tau=0}^{k-1} A^{k-1-\tau} Bu(\tau)$.
- **Matrici:** $\Phi = A^k$, $H = A^{k-1}B$, $\Psi = CA^k$; $W(0) = D$, $W(k) = CA^{k-1}B$.
- **Blocco complesso:** $\begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix}^k = \sigma^k \begin{pmatrix} \cos k\theta & \sin k\theta \\ -\sin k\theta & \cos k\theta \end{pmatrix}$, con $\alpha + j\omega = \sigma e^{j\theta}$.
- **Forma spettrale:** come per e^{At} , con λ_i^k e $\sigma_h^k \cos k\theta_h$, $\sigma_h^k \sin k\theta_h$.
- **Tipi di modi:** aperiodico ($\lambda > 0$), alternante ($\lambda < 0$), pseudoperiodico (coppia).
- **Modulo:** diverge se $|\lambda| > 1$, converge se < 1 , limitato se $= 1$; con $\lambda = 0$ si annulla dal primo passo.

5 Esercizi

Esercizio 1 – Un modo aperiodico e un modo alternante

Per $x(k+1) = Ax(k)$ con

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} :$$

- calcolare autovalori, autovettori destri e sinistri e A^k in forma spettrale;
- descrivere i modi naturali;
- scegliere gli stati iniziali per cui l'evoluzione libera contiene un solo modo.

Soluzione a pagina 9 →

Esercizio 2 – Esonero del 13/11/2023 (variante B), Canale 2, Prof.ssa Claudia Califano, esercizio 3

Descrivere i modi naturali per i sistemi a tempo discreto.

Soluzione a pagina 9 →

Esercizio 3 – Appello del 03/02/2020, Prof.ssa Claudia Califano e Prof. Paolo Di Giamberardino, esercizio 4, adattato

Un sistema dinamico può esser rappresentato tramite un modello implicito o esplicito.

- (b) Per sistemi a tempo discreto lineari e stazionari, indicare i passaggi matematici che permettono di passare da una rappresentazione all'altra e viceversa.

Soluzione a pagina 10 →

6 Soluzioni

Soluzione dell'Esercizio 1 – Un modo aperiodico e un modo alternante

(a) A è triangolare: $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$. Gli autovettori destri risolvono $(A - \lambda_i I)v = 0$:

$$A - \frac{1}{2}I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A + \frac{1}{2}I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Con $T^{-1} = (v_1 \ v_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, di determinante 1, le righe di $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ sono $w_1^T = (1 \ 0)$ e $w_2^T = (-1 \ 1)$. Quindi

$$A^k = \left(\frac{1}{2}\right)^k v_1 w_1^T + \left(-\frac{1}{2}\right)^k v_2 w_2^T = \left(\frac{1}{2}\right)^k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{2}\right)^k \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per $k = 1$ la somma ridà A .

(b) $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ dà un modo **aperiodico convergente** lungo v_1 ; $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$ un modo **alternante convergente** lungo v_2 , che passa a ogni passo dall'una all'altra parte dell'origine. Entrambi hanno modulo minore di 1.

(c) Con $c_i = w_i^T x_0$, $x_L(k) = c_1 \left(\frac{1}{2}\right)^k v_1 + c_2 \left(-\frac{1}{2}\right)^k v_2$.

- Solo il modo aperiodico: $c_2 = -x_{01} + x_{02} = 0$, cioè $x_0 = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ con $a \neq 0$.
- Solo il modo alternante: $c_1 = x_{01} = 0$, cioè $x_0 = b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ con $b \neq 0$.

Lo stato iniziale sta sulla retta dell'autovettore del modo scelto.

[← Torna all'Esercizio 1, pagina 7](#)

Soluzione dell'Esercizio 2 – Esonero del 13/11/2023 (variante B), Canale 2, Prof.ssa Claudia Califano, esercizio 3

Evoluzione libera. Per $x(k+1) = Ax(k)$, $x_L(k) = A^k x_0$. Con A diagonalizzabile, nella base degli autovettori (autovalori reali λ_i , coppie $\sigma_h e^{\pm j\theta_h}$):

$$x_L(k) = \sum_i c_i \lambda_i^k v_i + \sum_h m_h \sigma_h^k [\sin(k\theta_h + \varphi_h) v_{ha} + \cos(k\theta_h + \varphi_h) v_{hb}],$$

dove c_i , m_h , φ_h dipendono da x_0 : è la somma dei modi naturali, ciascuno lungo una retta o in un piano. Il termine della coppia viene dalla potenza del blocco, σ^k per la matrice di rotazione dell'angolo $k\theta$.

Tipi.

- $\lambda_i > 0$: modo **aperiodico**, lungo v_i sempre dalla stessa parte dell'origine;
- $\lambda_i < 0$: modo **alternante**, che passa a ogni passo dall'una all'altra parte dell'origine;

- coppia: modo **pseudoperiodico**, che a ogni passo ruota di θ_h nel piano di v_{ha} e v_{hb} con ampiezza $m_h \sigma_h^k$.

Comportamento. Conta il modulo: con $|\lambda| < 1$ (o $\sigma < 1$) il modo converge a zero, con $|\lambda| > 1$ diverge, con $|\lambda| = 1$ resta limitato ($\lambda = 1$ costante, $\lambda = -1$ alterna fra due valori opposti, $\sigma = 1$ ruota con ampiezza costante). Con $\lambda = 0$ il modo si annulla dal primo passo, in un numero finito di passi. A differenza del tempo continuo, il segno della parte reale non conta.

[← Torna all'Esercizio 2, pagina 7](#)

Soluzione dell'Esercizio 3 – Appello del 03/02/2020, Prof.ssa Claudia Califano e Prof. Paolo Di Giamberardino, esercizio 4, adattato

Da implicita a esplicita. Da $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$ con $x(0) = x_0$, per sostituzioni successive,

$$x(1) = Ax_0 + Bu(0), \quad x(2) = A^2x_0 + ABu(0) + Bu(1), \dots$$

e per induzione

$$x(k) = A^k x_0 + \sum_{\tau=0}^{k-1} A^{k-1-\tau} B u(\tau), \quad y(k) = CA^k x_0 + \sum_{\tau=0}^{k-1} CA^{k-1-\tau} B u(\tau) + Du(k).$$

Con $\Phi(k) = A^k$, $H(k) = A^{k-1}B$, $\Psi(k) = CA^k$, $W(0) = D$ e $W(k) = CA^{k-1}B$ per $k \geq 1$:

$$x(k) = \Phi(k) x_0 + \sum_{\tau=0}^{k-1} H(k-\tau) u(\tau), \quad y(k) = \Psi(k) x_0 + \sum_{\tau=0}^k W(k-\tau) u(\tau).$$

Da esplicita a implicita. Si leggono le matrici nei primi istanti:

$$A = \Phi(1), \quad B = H(1), \quad C = \Psi(0), \quad D = W(0).$$

Le matrici esplicite soddisfano, per $j \geq 1$,

$$\Phi(k+1) = \Phi(1) \Phi(k), \quad H(j+1) = \Phi(1) H(j),$$

$$\Psi(k) = \Psi(0) \Phi(k), \quad W(j) = \Psi(0) H(j),$$

perché $A^{k+1} = A \cdot A^k$ e $CA^{j-1}B = C \cdot A^{j-1}B$. Quindi, separando l'ultimo termine della somma,

$$x(k+1) = \Phi(1) \left[\Phi(k) x_0 + \sum_{\tau=0}^{k-1} H(k-\tau) u(\tau) \right] + H(1) u(k) = Ax(k) + Bu(k),$$

$$y(k) = \Psi(0) \left[\Phi(k) x_0 + \sum_{\tau=0}^{k-1} H(k-\tau) u(\tau) \right] + W(0) u(k) = Cx(k) + Du(k),$$

$$\text{e } x(0) = \Phi(0) x_0 = x_0.$$

← Torna all'Esercizio 3, pagina 8