

Appunti di Sistemi Dinamici

Canale 2 · Prof.ssa Claudia Califano

Capitolo 8: Discretizzazione

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dalle lezioni in aula e dal materiale del corso

Argomenti: Campionamento e tenuta · Sistema a tempo discreto equivalente

$A_D = e^{AT}$ e B_D · Autovalori $e^{\lambda T}$ e modi

Approssimazione di Eulero

Indice

1	Campionamento e tenuta	1
2	Le matrici del sistema equivalente	1
3	Autovalori e modi del sistema equivalente	3
4	L'approssimazione di Eulero	4
5	Esercizi	5
6	Soluzioni	7

1 Campionamento e tenuta

Definizione – Sistema a tempo discreto equivalente

Si comanda un sistema a tempo continuo con un ingresso **costante a tratti** e se ne leggono stato e uscita solo agli istanti kT :

$$u(t) = u_D(k) \text{ per } kT \leq t < (k+1)T, \quad x_D(k) = x(kT), \quad y_D(k) = y(kT).$$

Il legame fra u_D , x_D e y_D è un sistema a tempo discreto, il **sistema a tempo discreto equivalente**; $T > 0$ è il **periodo di campionamento**.

Serve quando un processo a tempo continuo è comandato da un calcolatore, che produce e legge sequenze di numeri (Figura 1):

1. il **dispositivo di tenuta** (*holder*) trasforma il numero $u_D(k)$ in un gradino che dura un periodo;
2. il sistema a tempo continuo evolve con questo ingresso;
3. il **campionatore**, sincronizzato con la tenuta, legge l'uscita agli istanti kT .

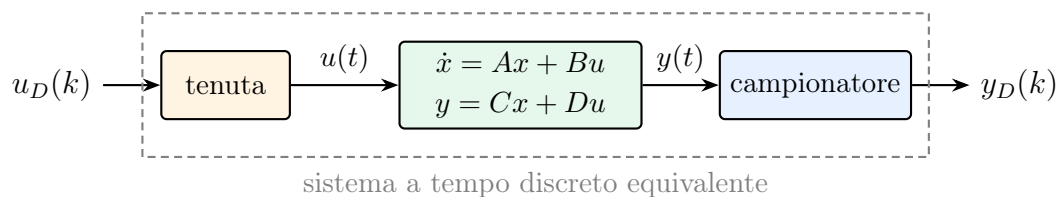


Figura 1: Discretizzazione: fra $u_D(k)$ e $y_D(k)$ si vede un sistema a tempo discreto.

2 Le matrici del sistema equivalente

Teorema – Sistema a tempo discreto equivalente

Il sistema a tempo discreto equivalente di $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx + Du$ con periodo di campionamento T è

$$x_D(k+1) = A_D x_D(k) + B_D u_D(k), \quad y_D(k) = C_D x_D(k) + D_D u_D(k),$$

con

$$A_D = e^{AT}, \quad B_D = \int_0^T e^{A\xi} d\xi B, \quad C_D = C, \quad D_D = D$$

Dimostrazione

1. La soluzione del Capitolo 2 con istante iniziale $t_0 = kT$ e $t = (k+1)T$, dove $t - t_0 = T$:

$$x((k+1)T) = e^{AT}x(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)} B u(\tau) d\tau.$$

2. Sull'intervallo l'ingresso è costante, $u(\tau) = u_D(k)$, ed esce dall'integrale.
3. Con $\xi = (k+1)T - \tau$: per $\tau = kT$ si ha $\xi = T$, per $\tau = (k+1)T$ si ha $\xi = 0$, e $d\xi = -d\tau$. Scambiando gli estremi,

$$\int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)} d\tau = \int_0^T e^{A\xi} d\xi.$$

4. All'istante kT l'uscita è $y(kT) = Cx(kT) + Du(kT)$, con $u(kT) = u_D(k)$.

□

Le matrici non dipendono da k : il sistema equivalente è stazionario, e dipende solo dal sistema a tempo continuo e da T .

Proposizione – B_D con A invertibile

Se A è invertibile, cioè non ha autovalori nulli,

$$B_D = A^{-1}(e^{AT} - I)B = (e^{AT} - I)A^{-1}B$$

Dimostrazione

1. Integrando la serie dell'esponenziale termine a termine:

$$\int_0^T e^{A\xi} d\xi = IT + \frac{AT^2}{2!} + \frac{A^2T^3}{3!} + \dots$$

2. Si raccoglie A^{-1} a sinistra:

$$A^{-1}\left(AT + \frac{A^2T^2}{2!} + \frac{A^3T^3}{3!} + \dots\right) = A^{-1}(e^{AT} - I),$$

perché alla serie di e^{AT} manca solo il primo termine, I .

3. A^{-1} commuta con le potenze di A , quindi anche con e^{AT} : si può raccogliere a destra.

□

Nel caso scalare $\dot{x} = \lambda x + bu$, con $\lambda \neq 0$: $A_D = e^{\lambda T}$ e $B_D = \frac{e^{\lambda T} - 1}{\lambda} b$ (Esercizio 1).

3 Autovalori e modi del sistema equivalente

Proposizione – Autovalori del sistema equivalente

Se A è diagonalizzabile con autovalori λ_i , gli autovalori di $A_D = e^{AT}$ sono

$$\lambda_{D,i} = e^{\lambda_i T}$$

con gli stessi autovettori.

Dimostrazione

Dalla forma spettrale del Capitolo 4 calcolata in $t = T$: $e^{AT} = \sum_i e^{\lambda_i T} v_i w_i^T$, e $e^{AT} v_j = e^{\lambda_j T} v_j$ perché $w_i^T v_j$ vale 1 per $i = j$ e 0 altrimenti. Per una coppia $\alpha \pm j\omega$ il blocco reale ha esponenziale

$$e^{\alpha T} \begin{pmatrix} \cos \omega T & \sin \omega T \\ -\sin \omega T & \cos \omega T \end{pmatrix},$$

il blocco della coppia $e^{\alpha T}(\cos \omega T \pm j \sin \omega T) = e^{(\alpha \pm j\omega)T}$. □

Il modulo di $e^{(\alpha+j\omega)T}$ è $e^{\alpha T}$, la fase è ωT . Quindi:

- $\text{Re } \lambda < 0$ dà $|\lambda_D| < 1$: un modo convergente resta convergente;
- $\text{Re } \lambda > 0$ dà $|\lambda_D| > 1$: un modo divergente resta divergente;
- $\text{Re } \lambda = 0$ dà $|\lambda_D| = 1$: l'asse immaginario va sulla circonferenza unitaria (Figura 2).

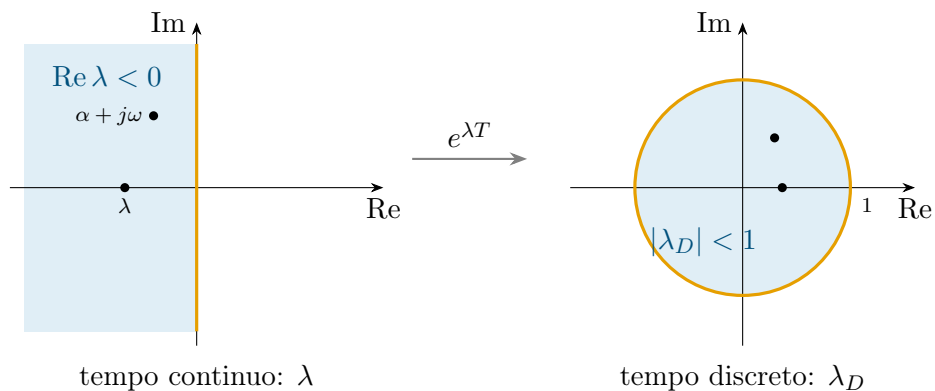


Figura 2: Con $T = 1$: il semipiano $\text{Re } \lambda < 0$ va nel cerchio unitario, l'asse immaginario sulla circonferenza.

Per un autovalore reale $e^{\lambda T} > 0$: il modo resta aperiodico e non diventa mai alternante né nullo. Una coppia complessa resta pseudoperiodica, salvo quando il seno si annulla, cioè ωT è multiplo di π .

Proposizione – Coppie con ωT multiplo di π

Per una coppia $\alpha \pm j\omega$:

- se $\omega T = \pi$, i due autovalori discreti coincidono in $-e^{\alpha T}$: due modi **alternanti**;
- se $\omega T = 2\pi$, coincidono in $e^{\alpha T}$: due modi **aperiodici**.

Dimostrazione

Nel blocco della proposizione precedente, $\omega T = \pi$ dà $\cos \omega T = -1$ e $\sin \omega T = 0$, quindi il blocco è $-e^{\alpha T} I$; $\omega T = 2\pi$ dà $e^{\alpha T} I$. Il blocco è diagonale: due modi lungo v_a e v_b . $\square$

Tempo continuo	Tempo discreto equivalente	Modo discreto
λ reale	$e^{\lambda T} > 0$	aperiodico
$\alpha \pm j\omega$	$e^{\alpha T} e^{\pm j\omega T}$	pseudoperiodico
$\alpha \pm j\omega, \omega T = \pi$	$-e^{\alpha T}$ doppio	due alternanti
$\alpha \pm j\omega, \omega T = 2\pi$	$e^{\alpha T}$ doppio	due aperiodici

Un sistema discretizzato non ha mai autovalori nulli né un unico modo alternante: questi compaiono solo nei sistemi nati a tempo discreto (Capitolo 7).

4 L'approssimazione di Eulero

Definizione – Approssimazione di Eulero

Arrestando al primo ordine le serie di e^{AT} e di $\int_0^T e^{A\xi} d\xi$:

$$A_D \approx I + AT, \quad B_D \approx TB$$

Si trascurano i termini in T^2 e oltre: l'approssimazione è buona se T è sufficientemente piccolo, e migliora con più termini della serie. Equivale ad approssimare la derivata con il rapporto incrementale,

$$\dot{x}(kT) \approx \frac{x((k+1)T) - x(kT)}{T},$$

da cui $x_D(k+1) \approx x_D(k) + T(Ax_D(k) + Bu_D(k))$.

Riepilogo

- **Discretizzazione:** ingresso costante sul periodo T , stato e uscita letti in kT .
- **Dinamica:** $A_D = e^{AT}$.
- **Ingresso:** $B_D = \int_0^T e^{A\xi} d\xi B$; se A è invertibile, $B_D = A^{-1}(e^{AT} - I)B$.
- **Uscita:** $C_D = C$, $D_D = D$.
- **Autovalori:** $\lambda_D = e^{\lambda T}$; il semipiano $\text{Re } \lambda < 0$ va nel cerchio $|\lambda_D| < 1$.
- **Modi:** si conservano tipo e convergenza; con $\omega T = \pi$ una coppia dà due modi alternanti.
- **Eulero:** $A_D \approx I + AT$, $B_D \approx TB$, per T piccolo.

5 Esercizi

Esercizio 1 – Un sistema del primo ordine

Calcolare il sistema a tempo discreto equivalente di $\dot{x} = -2x + bu$ per un periodo di campionamento T generico.

Soluzione a pagina 7 →

Esercizio 2 – Appello del 05/11/2025, Canale 2, Prof.ssa Claudia Califano, esercizio 2

È dato il sistema con rappresentazione nello spazio di stato

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t), \quad y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x(t).$$

Calcolare la rappresentazione nello spazio di stato del sistema a tempo discreto equivalente ottenuto mediante campionamento con tempo di campionamento $T = 2$ s.

Soluzione a pagina 7 →

Esercizio 3 – Appello del 13/01/2021, Canale 1, Prof. Salvatore Monaco, esercizio 2, adattato

Il problema della discretizzazione e il calcolo del modello a tempo discreto equivalente. Cosa rappresenta e come si calcola?

Soluzione a pagina 8 →

6 Soluzioni

Soluzione dell'Esercizio 1 – Un sistema del primo ordine

Con $A = -2$ e $B = b$:

$$A_D = e^{-2T}, \quad B_D = \int_0^T e^{-2\xi} d\xi b = \frac{1 - e^{-2T}}{2} b,$$

lo stesso che dà la formula con A invertibile, $A^{-1}(e^{AT} - 1)B = -\frac{1}{2}(e^{-2T} - 1)b$. Quindi

$$x_D(k+1) = e^{-2T} x_D(k) + \frac{1 - e^{-2T}}{2} b u_D(k).$$

L'autovalore e^{-2T} sta fra 0 e 1 per ogni $T > 0$: il modo aperiodico convergente del sistema continuo resta aperiodico convergente.

[← Torna all'Esercizio 1, pagina 5](#)

Soluzione dell'Esercizio 2 – Appello del 05/11/2025, Canale 2, Prof.ssa Claudia Califano, esercizio 2

Esponenziale. $A^2 = \begin{pmatrix} -9 & 0 \\ 0 & -9 \end{pmatrix} = -9I$, quindi $A^{2h} = (-9)^h I$ e $A^{2h+1} = (-9)^h A$. Nella serie dell'esponenziale i termini pari danno il coseno e quelli dispari il seno:

$$e^{At} = \left(1 - \frac{(3t)^2}{2!} + \dots\right) I + \frac{1}{3} \left(3t - \frac{(3t)^3}{3!} + \dots\right) A = \cos 3t I + \frac{\sin 3t}{3} A.$$

Gli autovalori sono $\pm 3j$ ($\text{tr } A = 0$, $\det A = 9$).

Dinamica. Con $T = 2$:

$$A_D = e^{2A} = \begin{pmatrix} \cos 6 + \frac{\sin 6}{3} & \frac{5 \sin 6}{3} \\ -\frac{2 \sin 6}{3} & \cos 6 - \frac{\sin 6}{3} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,867 & -0,466 \\ 0,186 & 1,053 \end{pmatrix}.$$

Ingresso. $\det A = 9 \neq 0$ e, da $A^2 = -9I$, $A^{-1} = -\frac{1}{9}A$. Allora

$$\begin{aligned} B_D &= A^{-1}(e^{2A} - I)B = -\frac{1}{9} \left[(\cos 6 - 1) AB + \frac{\sin 6}{3} A^2 B \right] \\ &= \frac{1}{9} \left[(1 - \cos 6) AB + 3 \sin 6 B \right], \end{aligned}$$

con $AB = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$:

$$B_D = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 - \cos 6 + 3 \sin 6 \\ -2(1 - \cos 6) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0,0887 \\ -0,0089 \end{pmatrix}.$$

Uscita. $C_D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$, $D_D = 0$. Il sistema è

$$x_D(k+1) = A_D x_D(k) + B_D u_D(k), \quad y_D(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x_D(k).$$

Gli autovalori di A_D sono $e^{\pm 6j}$, di modulo 1: il modo pseudoperiodico limitato resta limitato.

[← Torna all'Esercizio 2, pagina 5](#)

Soluzione dell'Esercizio 3 – Appello del 13/01/2021, Canale 1, Prof. Salvatore Monaco, esercizio 2, adattato

Che cosa rappresenta. Un sistema a tempo continuo $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx + Du$ riceve un ingresso costante a tratti, prodotto da un dispositivo di tenuta: $u(t) = u_D(k)$ per $kT \leq t < (k+1)T$. Stato e uscita si leggono con un campionatore sincronizzato, $x_D(k) = x(kT)$, $y_D(k) = y(kT)$. Il legame fra u_D e y_D è un sistema a tempo discreto, il sistema equivalente: è il modello che vede un calcolatore che comanda e osserva il processo.

Come si calcola. Dalla soluzione con $t_0 = kT$ e $t = (k+1)T$, portando fuori dall'integrale l'ingresso costante e ponendo $\xi = (k+1)T - \tau$:

$$x_D(k+1) = e^{AT} x_D(k) + \int_0^T e^{A\xi} d\xi B u_D(k), \quad y_D(k) = C x_D(k) + D u_D(k).$$

Quindi $A_D = e^{AT}$, $B_D = \int_0^T e^{A\xi} d\xi B$, che con A invertibile vale $A^{-1}(e^{AT} - I)B$, $C_D = C$, $D_D = D$.

Proprietà. Gli autovalori di A_D sono $e^{\lambda_i T}$: i modi convergenti restano convergenti e quelli divergenti divergenti. Per T piccolo vale l'approssimazione di Eulero $A_D \approx I + AT$, $B_D \approx TB$.

[← Torna all'Esercizio 3, pagina 6](#)