

Appunti di Sistemi Dinamici

Canale 2 · Prof.ssa Claudia Califano

Capitolo 9: Stabilità

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dalle lezioni in aula e dal materiale del corso

Argomenti: Punti di equilibrio · Stabilità semplice, asintotica, esponenziale
Proprietà locali e globali · Stabilità di un moto
Stabilità interna e autovalori · Regola di Cartesio

Indice

1	Punti di equilibrio	1
2	Stabilità semplice	1
3	Stabilità asintotica ed esponenziale	2
4	Proprietà locali e globali	3
5	Stabilità di un moto	3
6	Equilibri dei sistemi lineari	4
7	Stabilità interna dei sistemi lineari	4
8	Esempi	7
9	Il segno degli autovalori: regola di Cartesio	7
10	Esercizi	9
11	Soluzioni	11

1 Punti di equilibrio

Definizione – Coppia di equilibrio

Per il sistema $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$, con ingresso costante u_e , lo stato x_e è di **equilibrio** se, trovandosi in x_e , il sistema vi resta:

$$f(x_e, u_e) = \mathbf{0}$$

Di solito si studia $u_e = 0$. L'equazione $f(x_e, u_e) = \mathbf{0}$ può avere un numero qualunque di soluzioni:

- $\dot{x} = x^2 + 1$ non ha equilibri, perché $x^2 + 1 = 0$ non ha radici reali;
- $\dot{x} = -x$ ha il solo equilibrio $x_e = 0$;
- il pendolo del Capitolo 1 ha gli equilibri $\theta = k\pi$: fisicamente due, in basso e in alto.

I due equilibri del pendolo reagiscono in modo opposto a una piccola perturbazione, come un colpo di vento. In basso la massa oscilla e torna dov'era. In alto cade. La stabilità è la proprietà che distingue i due casi.

2 Stabilità semplice

Definizione – Stabilità

L'equilibrio x_e è **stabile** se, per quanto piccolo si fissi il raggio $\varepsilon > 0$, esiste un raggio $\delta_\varepsilon > 0$ tale che ogni moto che parte entro δ_ε da x_e resta entro ε :

$$\|x(t_0) - x_e\| < \delta_\varepsilon \implies \|x(t) - x_e\| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0.$$

Altrimenti x_e è **instabile**.

Instabile significa che esiste almeno un ε per cui nessun δ funziona: da stati iniziali vicini quanto si vuole a x_e qualche moto esce dal cerchio di raggio ε . In breve, la stabilità chiede che a perturbazioni piccole corrispondano spostamenti piccoli.

In $\mathbb{R}^n$ tutte le norme sono equivalenti, quindi la definizione non dipende dalla norma scelta. Anche $\delta_\varepsilon \leq \varepsilon$, altrimenti lo stato iniziale stesso uscirebbe dal cerchio grande.

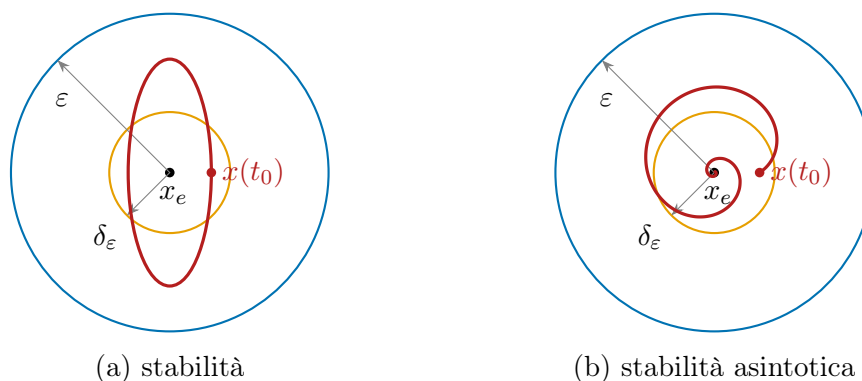


Figura 1: Il moto parte entro δ_ε da x_e e resta entro ε . (a) Senza tendere a x_e . (b) Tendendo a x_e .

3 Stabilità asintotica ed esponenziale

Definizione – Stabilità asintotica

L'equilibrio x_e è **asintoticamente stabile** se è stabile e i moti che partono abbastanza vicino tendono a x_e : esiste $\delta_a > 0$ tale che

$$\|x(t_0) - x_e\| < \delta_a \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x_e\| = 0.$$

Definizione – Stabilità esponenziale

L'equilibrio x_e è **esponenzialmente stabile** se i moti vicini tendono a x_e almeno come un esponenziale: esiste $\lambda > 0$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che

$$\|x(t_0) - x_e\| < \delta_\varepsilon \implies \|x(t) - x_e\| \leq \varepsilon e^{-\lambda(t-t_0)} \quad \forall t \geq t_0.$$

Ogni definizione aggiunge una richiesta alla precedente. Il pendolo le illustra:

Stabilità	Il moto vicino a x_e	Pendolo in basso
semplice	resta in un intorno arbitrario	senza attrito: oscilla per sempre
asintotica	resta vicino e tende a x_e	con attrito: si ferma in basso
esponenziale	tende a x_e almeno come $e^{-\lambda t}$	

La stabilità asintotica richiede che x_e sia un equilibrio **isolato**. Se in ogni intorno di x_e c'è un altro equilibrio, il moto che parte da lì vi resta e non tende a x_e .

Esempio – Stessa approssimazione lineare, stabilità diverse

Per $\dot{x} = \alpha x^3$ l'origine è l'unico equilibrio, e l'approssimazione lineare (Capitolo 1) è $\dot{x} = 0$ per ogni α . Con $t_0 = 0$:

- $\alpha = -1$: $x(t) = \frac{x_0}{\sqrt{1 + 2x_0^2 t}}$. Il modulo decresce e tende a 0, quindi l'origine è asintoticamente stabile. Va a zero come $1/\sqrt{t}$, più lentamente di ogni esponenziale, quindi non è esponenzialmente stabile.
- $\alpha = 1$: $x(t) = \frac{x_0}{\sqrt{1 - 2x_0^2 t}}$, che diverge per $t \rightarrow 1/(2x_0^2)$ da ogni $x_0 \neq 0$, quindi l'origine è instabile.

L'approssimazione lineare, uguale nei due casi, non decide la stabilità.

4 Proprietà locali e globali

Definizione – Stabilità asintotica globale

L'equilibrio x_e è **globalmente asintoticamente stabile** se è stabile e ogni moto tende a x_e , da qualunque stato iniziale:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x_e\| = 0 \quad \forall x(t_0) \in \mathbb{R}^n.$$

Le definizioni delle Sezioni 2 e 3 sono **locali**: riguardano i moti che partono vicino a x_e , e un sistema con più equilibri ne ha intorno a ciascuno, come il pendolo. Un equilibrio globalmente asintoticamente stabile è l'unico equilibrio, perché un moto che parte da un altro equilibrio vi resta.

5 Stabilità di un moto

Definizione – Stabilità di un moto

Fissato l'ingresso $u(t)$, sia $x(t)$ il moto di riferimento e $x_p(t)$ quello da uno stato iniziale perturbato. Lo **scostamento** $\xi = x_p - x$ soddisfa

$$\dot{\xi}(t) = f(x(t) + \xi(t), u(t)) - f(x(t), u(t)) = g(t, \xi(t)).$$

Il moto $x(t)$ è **stabile** (asintoticamente, ...) se lo è l'equilibrio $\xi = \mathbf{0}$ di questo sistema.

$\xi = \mathbf{0}$ è un equilibrio perché $g(t, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Così la stabilità di un moto diventa la stabilità di un equilibrio. In generale però il sistema di ξ non è stazionario, perché g contiene il moto di riferimento $x(t)$.

6 Equilibri dei sistemi lineari

Proposizione – Equilibri di $\dot{x} = Ax$

Gli equilibri sono le soluzioni di $Ax_e = \mathbf{0}$, cioè $\text{Ker } A$:

- se $\det A \neq 0$ (nessun autovalore nullo), l'origine è l'**unico** equilibrio;
- se $\det A = 0$, gli equilibri formano il sottospazio $\text{Ker } A$, una retta, un piano, ..., e nessuno è isolato.

La dimensione di $\text{Ker } A$ è la molteplicità geometrica dell'autovalore 0. Per esempio, se la prima colonna di A è nulla, $Ae_1 = \mathbf{0}$ e ogni punto dell'asse x_1 è di equilibrio, qualunque sia il resto di A .

7 Stabilità interna dei sistemi lineari

Teorema – Stabilità e matrice di transizione

Un equilibrio x_e di $\dot{x} = Ax$ è stabile se e solo se e^{At} è limitata: esiste $k > 0$ con

$$\|e^{A(t-t_0)}\| \leq k \quad \forall t \geq t_0.$$

La condizione dipende solo da A , quindi vale per tutti gli equilibri o per nessuno.

Dimostrazione

1. Da $Ax_e = \mathbf{0}$ segue $e^{A(t-t_0)}x_e = x_e$, quindi

$$\|x(t) - x_e\| = \|e^{A(t-t_0)}(x(t_0) - x_e)\| \leq \|e^{A(t-t_0)}\| \|x(t_0) - x_e\|.$$

2. *Sufficiente.* Con $\|e^{A(t-t_0)}\| \leq k$ e $\delta_\varepsilon = \varepsilon/k$ il secondo membro è minore di ε .
3. *Necessaria.* Se un elemento (i, j) di $e^{A(t-t_0)}$ non è limitato, lo stato iniziale $x(t_0) = x_e + \frac{\delta}{2}e_j$, vicino quanto si vuole a x_e , dà una componente $x_i(t) - x_{e,i}$ non limitata.

□

Definizione – Stabilità interna

La stabilità degli equilibri di $\dot{x} = Ax$ si chiama **stabilità interna** del sistema: riguarda tutti i modi naturali, eccitabili e osservabili o no.

Le leggi temporali di e^{At} sono quelle dei modi naturali (Capitolo 4, osservazione «Parte reale nulla e molteplicità»). Da qui il criterio sugli autovalori.

Teorema – Stabilità interna e autovalori

Per $\dot{x} = Ax$:

1. **asintoticamente stabile** se e solo se tutti gli autovalori hanno

$$\text{Re } \lambda_i < 0$$

2. **stabile** se e solo se tutti hanno $\text{Re } \lambda_i \leq 0$ e quelli con $\text{Re } \lambda_i = 0$ hanno molteplicità algebrica uguale alla geometrica;
3. **instabile** se un autovalore ha $\text{Re } \lambda_i > 0$, oppure $\text{Re } \lambda_i = 0$ con molteplicità algebrica maggiore della geometrica.

Dimostrazione

1. Con $\text{Re } \lambda < 0$ ogni legge $t^h e^{\lambda t}$ tende a zero, anche con i fattori polinomiali dei blocchi di Jordan. Con $\text{Re } \lambda > 0$ diverge.
2. Con $\text{Re } \lambda = 0$ la legge $e^{\lambda t}$ è limitata. Se le molteplicità differiscono compare anche $t e^{\lambda t}$, che diverge.
3. Per il teorema precedente la stabilità equivale a leggi tutte limitate. La convergenza di $x(t)$ a $x_e = \mathbf{0}$ da ogni stato vicino equivale a leggi tutte convergenti, cioè $\text{Re } \lambda_i < 0$ per ogni i .

□

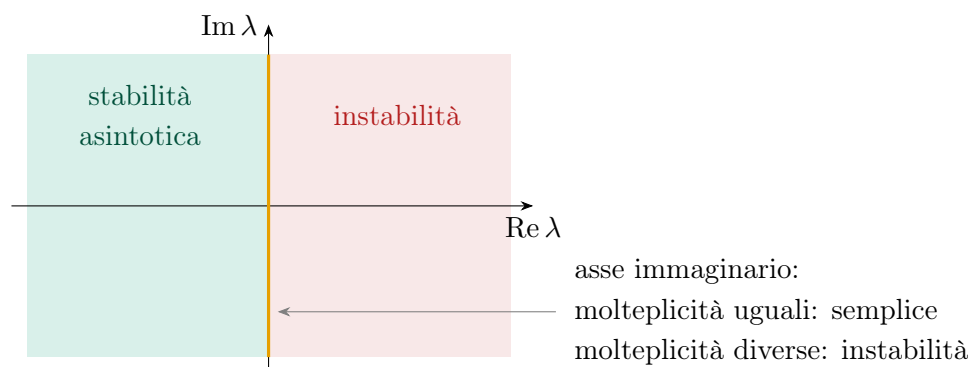


Figura 2: La posizione degli autovalori nel piano complesso decide la stabilità interna.

Basta un autovalore con $\operatorname{Re} \lambda > 0$, cioè un solo modo divergente, per l'instabilità.

Gli Esercizi 2, 3 e 4 applicano il criterio a sistemi del terzo ordine.

Proposizione – La stabilità asintotica è globale ed esponenziale

Se tutti gli autovalori di A hanno $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$:

- l'origine è l'unico equilibrio ed è globalmente asintoticamente stabile;
- la convergenza è esponenziale.

Dimostrazione

1. Nessun autovalore è nullo, quindi $\det A \neq 0$ e l'origine è l'unico equilibrio.
2. Sia δ_a il raggio della stabilità asintotica. Dato $x(t_0)$ qualunque, si sceglie $h > 0$ con $h\|x(t_0)\| < \delta_a$. Lo stato $z = hx$ soddisfa $\dot{z} = h\dot{x} = Az$, la stessa equazione. Quindi $z(t) \rightarrow \mathbf{0}$, e anche $x(t) = z(t)/h \rightarrow \mathbf{0}$.
3. Sia $0 < \lambda < \min_i |\operatorname{Re} \lambda_i|$. Ogni legge $t^h e^{\lambda_i t}$ moltiplicata per $e^{\lambda t}$ tende ancora a zero, quindi è limitata. Allora $\|e^{At}\| \leq M e^{-\lambda t}$ per un $M > 0$.

□

Osservazione – Autovalore nullo

Con un autovalore nullo gli equilibri formano $\operatorname{Ker} A$ e nessuno è isolato, quindi il sistema è semplicemente stabile o instabile, mai asintoticamente stabile. Un equilibrio unico non basta però per la stabilità asintotica. Con autovalori $\pm j\omega$ semplici, $\det A = \omega^2 \neq 0$ e l'origine è unica ma solo semplicemente stabile.

Proposizione – Stabilità dei moti di un sistema lineare

Per $\dot{x} = Ax + Bu$ lo scostamento fra due moti con lo stesso ingresso soddisfa

$$\dot{\xi} = A\xi.$$

Ogni moto ha quindi la stabilità dell'origine di $\dot{x} = Ax$, cioè la stabilità interna.

Dimostrazione

$$\dot{\xi} = \dot{x}_p - \dot{x} = Ax_p + Bu - (Ax + Bu) = A(x_p - x) = A\xi.$$

□

8 Esempi

Esempio – Stabilità di sistemi del secondo ordine

Per matrici triangolari gli autovalori stanno sulla diagonale; con un autovalore doppio la molteplicità geometrica è $2 - \text{rk}(A - \lambda I)$.

A	Autovalori	Leggi in e^{At}	Stabilità
$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$	$-1, -3$	e^{-t}, e^{-3t}	asintotica
$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	-1 doppio, un autovettore	$e^{-t}, t e^{-t}$	asintotica
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\pm j$	$\cos t, \sin t$	semplice
$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	0 doppio, due autovettori	1	semplice
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	0 doppio, un autovettore	$1, t$	instabile
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$	$1, -2$	e^t, e^{-2t}	instabile
$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	1 doppio, un autovettore	$e^t, t e^t$	instabile

Le tre matrici con un blocco di Jordan differiscono solo per $\text{Re } \lambda$, e il fattore t decide soltanto per $\lambda = 0$.

9 Il segno degli autovalori: regola di Cartesio

Per la stabilità basta il segno della parte reale degli autovalori, non il loro valore.

Proposizione – Regola di Cartesio per il secondo grado

Nel polinomio $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$, con $a_1 \neq 0$ e $a_0 \neq 0$, una **variazione** è un cambio di segno fra coefficienti consecutivi e una **permanenza** un segno ripetuto. Allora:

- le radici con parte reale positiva sono tante quante le variazioni;
- se $a_1 > 0$ e $a_0 > 0$, le radici hanno entrambe parte reale negativa.

Dimostrazione

Le radici hanno somma $-a_1$ e prodotto a_0 .

1. Con $a_0 < 0$ (una variazione) sono reali di segno opposto: una positiva.
2. Con $a_0 > 0$ sono reali dello stesso segno o complesse coniugate, con parte reale di segno uguale a quello di $-a_1$: negativa se $a_1 > 0$ (zero variazioni), positiva se $a_1 < 0$ (due variazioni).

□

Esempio – Il massa-molla-smorzatore

Il carrello del Capitolo 1 ha polinomio $\lambda^2 + \frac{b}{M}\lambda + \frac{K}{M}$, con $M > 0$ e $K > 0$:

- con attrito, $b > 0$: zero variazioni, quindi è asintoticamente stabile. Il carrello spostato torna all'equilibrio, con o senza oscillazioni;
- senza attrito, $b = 0$: autovalori $\pm j\sqrt{K/M}$ semplici, quindi è semplicemente stabile e oscilla per sempre.

Un sistema meccanico che dissipa energia è stabile. Una costante elastica $K < 0$ darebbe una variazione e l'instabilità, ma non è fisica.

L'Esercizio 1 studia il caso $M = 1$, $b = 4$, $K = 5$.

Per un polinomio di grado maggiore le variazioni non bastano. Il **criterio di Routh** generalizza la regola: dice in quale semipiano stanno le radici, senza calcolarle.

Riepilogo

- **Equilibrio:** $f(x_e, u_e) = \mathbf{0}$; per $\dot{x} = Ax$, $\text{Ker } A$.
- **Stabilità:** $\forall \varepsilon \exists \delta_\varepsilon$: partendo entro δ_ε si resta entro ε .
- **Asintotica:** stabile e $x(t) \rightarrow x_e$; richiede un equilibrio isolato.
- **Esponenziale:** $\|x(t) - x_e\| \leq \varepsilon e^{-\lambda(t-t_0)}$; **globale:** da ogni stato iniziale.
- **Moto:** lo scostamento $\xi = x_p - x$ ha l'equilibrio $\xi = \mathbf{0}$; nel lineare $\dot{\xi} = A\xi$.
- **Stabilità interna:** asintotica se $\text{Re } \lambda_i < 0$; semplice se $\text{Re } \lambda_i \leq 0$ con molteplicità uguali sull'asse immaginario.
- **Lineare:** la stabilità asintotica è globale ed esponenziale; con un autovalore nullo è impossibile.
- **Cartesio:** per $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$, radici a parte reale positiva quante le variazioni di segno.

10 Esercizi

Esercizio 1 – Un massa-molla-smorzatore

Per il sistema

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -5x_1 - 4x_2 + u, \quad y = x_1$$

- (a) tracciare lo schema di simulazione;
- (b) studiare la stabilità interna;
- (c) calcolare l'uscita in evoluzione libera da $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e descrivere la traiettoria nello stato.

Soluzione a pagina 11 →

Esercizio 2 – Esonero del 13/11/2023 (variante B), Canale 2, Prof.ssa Claudia Califano, esercizio 1, adattato

Si consideri il sistema descritto da

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t), \quad y(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x(t).$$

Studiare la stabilità interna.

Soluzione a pagina 12 →

Esercizio 3 – Esonero del 13/11/2023 (variante B), Canale 2, Prof.ssa Claudia Califano, esercizio 2

Determinare una rappresentazione con lo spazio di stato di un sistema descritto dall'equazione differenziale

$$y^{(3)}(t) + 2y^{(2)}(t) + k\dot{y}(t) + 2ky(t) = u(t).$$

Per il sistema determinato studiare la stabilità del sistema al variare del parametro k .

Soluzione a pagina 12 →

Esercizio 4 – Appello del 08/01/2025, Canale 2, Prof.ssa Claudia Califano, esercizio 1, adattato

Si consideri il sistema

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} u(t), \quad y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} x(t).$$

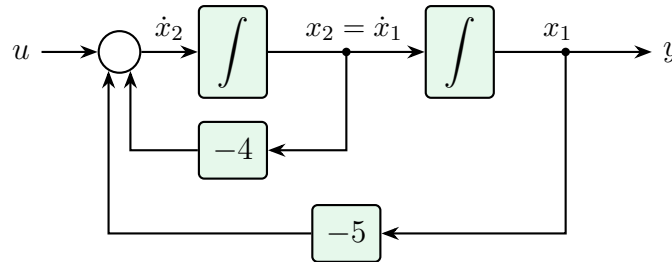
Studiare la stabilità interna del sistema dato.

Soluzione a pagina 12 →

11 Soluzioni

Soluzione dell'Esercizio 1 – Un massa-molla-smorzatore

(a) Due integratori in cascata: il primo riceve $\dot{x}_2$ e dà $x_2 = \dot{x}_1$, il secondo dà $x_1 = y$. Il sommatore davanti al primo riceve u , $-5x_1$ e $-4x_2$.



(b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$ è in forma compagna: $\lambda^2 + 4\lambda + 5$. Zero variazioni, quindi parte reale negativa: le radici sono $-2 \pm j$ ($\alpha = -2$, $\omega = 1$). Il sistema è asintoticamente stabile.

(c) Per $\lambda = -2 + j$, da $(A - \lambda I)u = \mathbf{0}$ la prima riga dà $(2 - j)a + b = 0$. Con $a = 1$, $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -2+j \end{pmatrix}$, quindi

$$u_a = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad u_b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Controllo: $Au_a = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \alpha u_a - \omega u_b$ e $Au_b = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \omega u_a + \alpha u_b$.

Da $x_0 = c_a u_a + c_b u_b$: $c_a = 1$ e $-2 + c_b = 1$, quindi $c_b = 3$. Con la proposizione «Evoluzione libera con una coppia complessa» del Capitolo 4, $m = \sqrt{10}$, $\sin \varphi = 1/\sqrt{10}$, $\cos \varphi = 3/\sqrt{10}$, cioè $\varphi = \arctan \frac{1}{3}$, e

$$x_l(t) = \sqrt{10} e^{-2t} [\sin(t + \varphi) u_a + \cos(t + \varphi) u_b].$$

L'uscita è la prima componente, e u_b ha la prima componente nulla:

$$y_l(t) = \sqrt{10} e^{-2t} \sin\left(t + \arctan \frac{1}{3}\right) = e^{-2t} (\cos t + 3 \sin t).$$

La traiettoria è una spirale che converge all'origine. Da x_0 la velocità è $Ax_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -9 \end{pmatrix}$, quindi il verso è orario. Con e^{-2t} in un giro, cioè 2π , il raggio si riduce di $e^{-4\pi}$: la spirale si stringe quasi subito.

[← Torna all'Esercizio 1, pagina 9](#)

Soluzione dell'Esercizio 2 – Esonero del 13/11/2023 (variante B), Canale 2, Prof.ssa Claudia Califano, esercizio 1, adattato

A è triangolare superiore a blocchi. Il blocco $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, della forma $\begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix}$, ha autovalori $2 \pm j$, e l'ultimo elemento dà -1 . La coppia $2 \pm j$ ha parte reale positiva, quindi il sistema è **instabile**: il suo modo pseudoperiodico è una spirale divergente. Basta un solo modo divergente, anche se -1 dà un modo convergente.

[← Torna all'Esercizio 2, pagina 9](#)

Soluzione dell'Esercizio 3 – Esonero del 13/11/2023 (variante B), Canale 2, Prof.ssa Claudia Califano, esercizio 2

Rappresentazione. Con $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$, $x_3 = \ddot{y}$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2k & -k & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = 0.$$

Autovalori. Dall'ultima riga della forma compagna,

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^3 + 2\lambda^2 + k\lambda + 2k = (\lambda + 2)(\lambda^2 + k).$$

Un autovalore è sempre -2 ; gli altri sono le radici di $\lambda^2 + k$.

Stabilità.

- $k > 0$: $\pm j\sqrt{k}$, semplici sull'asse immaginario. Molteplicità uguali, quindi **stabilità semplice**.
- $k < 0$: $\pm\sqrt{-k}$, e $\sqrt{-k} > 0$, quindi **instabile**.
- $k = 0$: 0 doppio. A ha le ultime due righe indipendenti, $\text{rk } A = 2$, quindi un solo autovettore: molteplicità geometrica $1 < 2$, quindi **instabile**.

Per nessun k il sistema è asintoticamente stabile.

[← Torna all'Esercizio 3, pagina 9](#)

Soluzione dell'Esercizio 4 – Appello del 08/01/2025, Canale 2, Prof.ssa Claudia Califano, esercizio 1, adattato

La prima colonna di A è $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, quindi A è triangolare a blocchi: un autovalore è -3 , gli altri sono quelli di $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, radici di $(\lambda - 1)(\lambda + 1) + 5 = \lambda^2 + 4$, cioè $\pm 2j$.

Nessun autovalore ha parte reale positiva. La coppia $\pm 2j$ sta sull'asse immaginario ed è semplice, quindi le molteplicità coincidono: il sistema è **semplicemente stabi-**

le, non asintoticamente. Il modo di -3 converge, quello di $\pm 2j$ oscilla con ampiezza costante.

← Torna all'Esercizio 4, pagina 10