

Formulario di Sistemi Dinamici

Canale 2 · Prof.ssa Claudia Califano

Rappresentazioni lineari stazionarie ($t_0 = 0$)

	Tempo continuo	Tempo discreto
Forma implicita	$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t)$ $y(t) = C x(t) + D u(t)$ $x(0) = x_0$	$x(k+1) = A x(k) + B u(k)$ $y(k) = C x(k) + D u(k)$ $x(0) = x_0$
Forma esplicita	$x(t) = \Phi(t) x_0$ $+ \int_0^t H(t-\tau) u(\tau) d\tau$ $y(t) = \Psi(t) x_0$ $+ \int_0^t W(t-\tau) u(\tau) d\tau$	$x(k) = \Phi(k) x_0$ $+ \sum_{\tau=0}^{k-1} H(k-\tau) u(\tau)$ $y(k) = \Psi(k) x_0$ $+ \sum_{\tau=0}^k W(k-\tau) u(\tau)$
Φ e H	$\Phi(t) = e^{At}$ $H(t) = e^{At} B$	$\Phi(k) = A^k$ $H(k) = A^{k-1} B \quad (k \geq 1)$
Ψ e W	$\Psi(t) = C e^{At}$ $W(t) = C e^{At} B + D \delta(t)$	$\Psi(k) = C A^k$ $W(0) = D$ $W(k) = C A^{k-1} B \quad (k \geq 1)$
Dalla esplicita	$A = \dot{\Phi}(0), \quad B = H(0), \quad C = \Psi(0)$ D : coefficiente di δ in W	$A = \Phi(1), \quad B = H(1)$ $C = \Psi(0), \quad D = W(0)$

Evoluzione e risposte (continuo e discreto)

Libera, forzata	$x = x_l + x_f, \quad y = y_l + y_f$ libera ($u = 0$): $x_l = \Phi x_0, \quad y_l = \Psi x_0$ forzata: $x_0 = 0$
Proprietà di Φ, H	$\Phi(0) = I, \quad \Phi(t-t_0) = \Phi(t-t_1) \Phi(t_1-t_0), \quad H(t-\tau) = \Phi(t-t_1) H(t_1-\tau)$
Impulso sull'ingresso i	$u = e_i \delta, \quad x_0 = 0: \quad x_f = H e_i, \quad y_f = W e_i \quad (\text{colonna } i)$
Nuove coordinate	$z = T x, \quad \det T \neq 0: \quad \tilde{A} = T A T^{-1}, \quad \tilde{B} = T B, \quad \tilde{C} = C T^{-1}, \quad \tilde{D} = D$ $\tilde{\Phi} = T \Phi T^{-1}, \quad \tilde{H} = T H, \quad \tilde{\Psi} = \Psi T^{-1}, \quad \tilde{W} = W$

Ingressi canonici e regime (tempo continuo)

Ingressi canonici	$\delta_{-k}(t) = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \delta_{-1}(t)$ gradino δ_{-1} , rampa δ_{-2} , parabola δ_{-3}
Gradino, $n = 1$	$\dot{x} = ax + bu, \quad a < 0, \quad u = \delta_{-1}: \quad x_f(t) = -\frac{b}{a} (1 - e^{at})$

Regime libera estinta: gradino $\rightarrow$ gradino rampa $\rightarrow$ rampa + gradino
 senoide $\rightarrow$ senoide, stessa pulsazione

Strumenti di calcolo

Esponenziale $e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}, \quad \frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At} = e^{At} A$

Matrici a blocchi $\text{diag}(A_1, \dots, A_r)^k = \text{diag}(A_1^k, \dots, A_r^k)$
 $e^{\text{diag}(A_1, \dots, A_r)t} = \text{diag}(e^{A_1 t}, \dots, e^{A_r t})$

Derivata d'integrale $\frac{d}{dt} \int_{t_0}^t f(t, \tau) d\tau = f(t, t) + \int_{t_0}^t \frac{\partial f}{\partial t}(t, \tau) d\tau$

Impulso di Dirac $\int_a^b f(\tau) \delta(\tau - t_1) d\tau = f(t_1) \text{ se } t_1 \in [a, b]$

Dall'equazione al modello

Equazione di ordine n $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{y} + a_0y = u, \quad x = (y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)})'$
 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$
 $\det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$ (si legge dall'ultima riga)

Carrello $M\ddot{y} + b\dot{y} + Ky = u: \quad \lambda^2 + \frac{b}{M}\lambda + \frac{K}{M}$
 $b^2 > 4MK$: reali distinti $b^2 = 4MK$: coincidenti $b^2 < 4MK$: complessi

Equilibrio, $\dot{x} = f(x, u)$ $f(x_e, u_e) = 0; \quad z = x - x_e, \quad v = u - u_e: \quad \dot{z} = Az + Bv$
 $A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_e, u_e}, \quad B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x_e, u_e}$

Radici, grado 2 $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0, \quad a_1, a_0 \neq 0$ reali: radici con $\text{Re} > 0$ = variazioni di segno

Autovalori, autovettori e coordinate dei modi

Autovettori $\det(\lambda I - A) = 0, \quad (A - \lambda I)u = \mathbf{0}$ (destro), $v'(A - \lambda I) = \mathbf{0}'$ (sinistro)
 $U = (u_1 \dots u_n)$, righe di U^{-1} : $v'_1, \dots, v'_n, \quad v'_i u_i = 1, \quad v'_i u_j = 0 \quad (i \neq j)$

Diagonalizzabile $\mu_i = \hat{\mu}_i$ per ogni $\lambda_i, \quad \hat{\mu}_i = n - \text{rank}(\lambda_i I - A); \quad n$ autovalori distinti: sì
 $U^{-1}AU = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

Coppia complessa $\lambda = \alpha + j\omega \quad (\omega > 0), \quad u = u_a + j u_b: \quad U = (u_a \ u_b), \quad \text{righe di } U^{-1}: v'_a, v'_b$
 $A(u_a \ u_b) = (u_a \ u_b) \begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = U^{-1}AU = \begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix}$

Blocchi a vista autovalori di $\begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix}$: $\alpha \pm j\omega$; triangolare a blocchi: quelli dei blocchi

Non diagonalizzabile $(A - \lambda I)u_2 = u_1$ (catena), $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad e^{Jt} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Stato iniziale

$$x_0 = \sum_{i=1}^{\mu} c_i u_i + \sum_{k=1}^{\nu} (c_{ka} u_{ka} + c_{kb} u_{kb}), \quad \mu + 2\nu = n$$

$$c_i = v'_i x_0, \quad c_{ka} = v'_{ka} x_0, \quad c_{kb} = v'_{kb} x_0$$

$$c_{kb} + j c_{ka} = m_k e^{j\varphi_k}: \quad m_k = \sqrt{c_{ka}^2 + c_{kb}^2}, \quad \sin \varphi_k = \frac{c_{ka}}{m_k}, \quad \cos \varphi_k = \frac{c_{kb}}{m_k}$$

Forma spettrale e modi naturali (A diagonalizzabile)

	Tempo continuo	Tempo discreto
Autovalori reali	$e^{At} = \sum_{i=1}^{\mu} e^{\lambda_i t} u_i v'_i$	$A^k = \sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i^k u_i v'_i$
Ogni coppia, si somma	$e^{\alpha t} [\cos \omega t (u_a v'_a + u_b v'_b) + \sin \omega t (u_a v'_b - u_b v'_a)]$	$\sigma^k [\cos k\theta (u_a v'_a + u_b v'_b) + \sin k\theta (u_a v'_b - u_b v'_a)]$ $\alpha + j\omega = \sigma e^{j\theta}, \quad \sigma = \sqrt{\alpha^2 + \omega^2}$
Blocco della coppia	$\exp\left(\begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix} t\right)$ $= e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix}^k$ $= \sigma^k \begin{pmatrix} \cos k\theta & \sin k\theta \\ -\sin k\theta & \cos k\theta \end{pmatrix}$
Libera x_l	$\sum_{i=1}^{\mu} c_i e^{\lambda_i t} u_i$ $+ \sum_{k=1}^{\nu} m_k e^{\alpha_k t} [\sin(\omega_k t + \varphi_k) u_{ka} + \cos(\omega_k t + \varphi_k) u_{kb}]$	$\sum_{i=1}^{\mu} c_i \lambda_i^k u_i$ $+ \sum_{h=1}^{\nu} m_h \sigma_h^k [\sin(k\theta_h + \varphi_h) u_{ha} + \cos(k\theta_h + \varphi_h) u_{hb}]$
Tipi di modo	aperiodico: λ reale pseudoperiodico: coppia	aperiodico: $\lambda > 0$ alternante: $\lambda < 0$ pseudoperiodico: coppia $\lambda = 0$: nullo per $k \geq 1$
Andamento	$\text{Re } \lambda < 0$: converge a 0 $\text{Re } \lambda > 0$: diverge $\text{Re } \lambda = 0$: limitato coppia con $\alpha = 0$: periodo $2\pi/\omega$	$ \lambda < 1$ ($\sigma < 1$): converge a 0 $ \lambda > 1$: diverge $ \lambda = 1$: limitato; $\lambda = -1$: alterna

Parametri dei modi

Costante di tempo $\tau = -\frac{1}{\lambda} \quad (\lambda < 0): \quad e^{\lambda t} = e^{-t/\tau}, \quad \text{vale } 1/e \text{ in } t = \tau$

ω_n e ξ $\omega_n = \sqrt{\alpha^2 + \omega^2}, \quad \xi = -\frac{\alpha}{\omega_n}; \quad \text{per } |\xi| < 1: \quad \alpha = -\xi \omega_n, \quad \omega = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$

Dal polinomio $\lambda^2 + 2\xi\omega_n\lambda + \omega_n^2; \quad \lambda^2 + a_1\lambda + a_0, \quad a_0 > 0: \quad \omega_n = \sqrt{a_0}, \quad \xi = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0}}$

Valori di ξ $|\xi| < 1$: complesse (smorzato se $\xi > 0$, amplificato se $\xi < 0$) $\xi = 0$: $\pm j\omega_n$
 $|\xi| \geq 1$: reali $\xi = 1$: $-\omega_n$ doppia $\xi = -1$: ω_n doppia

Eccitabilità e osservabilità (tempo continuo, autovalori semplici)

Eccitabile	$v'_i B \neq \mathbf{0}'$	coppia: $v'_a B \neq \mathbf{0}'$ oppure $v'_b B \neq \mathbf{0}'$
Osservabile	$C u_i \neq \mathbf{0}$	coppia: $C u_a \neq \mathbf{0}$ oppure $C u_b \neq \mathbf{0}$
Modi nelle matrici	$H(t) = \sum_i e^{\lambda_i t} u_i (v'_i B) + \dots, \quad \Psi(t) = \sum_i e^{\lambda_i t} (C u_i) v'_i + \dots$ $W(t) = \sum_i e^{\lambda_i t} (C u_i)(v'_i B) + D \delta(t) + \dots$: solo modi eccitabili e osservabili	

Discretizzazione (ingresso costante a tratti, passo T)

	Tempo continuo	Discretizzato
Segnali	$u(t) = u_D(k), \quad kT \leq t < (k+1)T$	$x_D(k) = x(kT), \quad y_D(k) = y(kT)$
Sistema	$\dot{x} = A x + B u$ $y = C x + D u$	$x_D(k+1) = A_D x_D(k) + B_D u_D(k)$ $y_D(k) = C_D x_D(k) + D_D u_D(k)$
Matrici	A, B, C, D	$A_D = e^{AT}, \quad B_D = \int_0^T e^{A\xi} d\xi B$ $C_D = C, \quad D_D = D$
A invertibile		$B_D = A^{-1}(e^{AT} - I)B$
Eulero, T piccolo		$A_D \approx I + AT, \quad B_D \approx TB$
Autovalori	λ reale $\lambda = \alpha \pm j\omega$ $\text{Re } \lambda < 0, = 0, > 0$	$\lambda_D = e^{\lambda T} > 0$: aperiodico $e^{\alpha T} e^{\pm j\omega T}$: modulo $e^{\alpha T}$, angolo ωT $\omega T = \pi$: $-e^{\alpha T}$ doppio (alternanti) $\omega T = 2\pi$: $e^{\alpha T}$ doppio (aperiodici) $ \lambda_D < 1, = 1, > 1$