

Appunti di Sistemi Dinamici

Canale 1 · Prof. Paolo Di Giamberardino

Capitolo 1: Sistemi dinamici e rappresentazione con lo stato

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dalle lezioni in aula e dal materiale del corso

Argomenti: Sistema · Orientamento causa-effetto · Sistema dinamico · Causalità
Stato e proprietà di separazione · Funzioni di transizione e di uscita
Stazionarietà · Linearità · Evoluzione libera e forzata · Spazi lineari

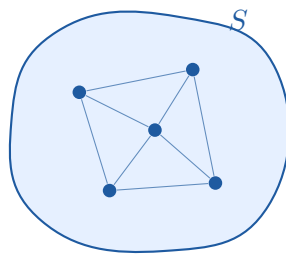
Indice

1	Il concetto di sistema	1
2	Orientamento: cause ed effetti	1
3	Sistemi dinamici	2
4	Descrizione ingresso-uscita e causalità	3
5	Lo stato	3
5.1	Sufficienza dello stato: la proprietà di separazione	4
6	Rappresentazione con lo stato	5
6.1	L'intervallo aperto in t e gli effetti istantanei	6
7	Stazionarietà	6
7.1	L'esperimento traslato nel tempo	6
7.2	Conseguenza: conta solo la durata	7
7.3	Stazionarietà e scelta del modello	8
8	Linearità	8
8.1	Evoluzione libera ed evoluzione forzata	9
8.2	Spazi lineari per stato, ingresso e uscita	10

1 Il concetto di sistema

Definizione – Sistema

Un **sistema** è un insieme di **almeno due elementi**, **collegati** tra loro, che **concorrono** a un funzionamento comune. Gli elementi non sono necessariamente oggetti fisici: possono essere entità astratte (per esempio il tasso di sconto in un sistema economico). Ciascun elemento può essere a sua volta considerato un sistema.



La definizione è generica perché lo è l'approccio: si lavora con **modelli matematici**, e le tecniche sviluppate per un modello valgono per tutti i sistemi che esso rappresenta, elettrici, meccanici, economici o biologici.

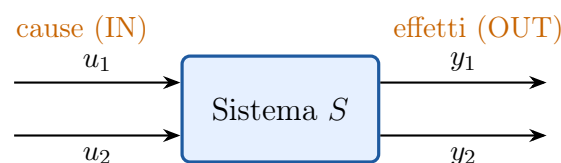
2 Orientamento: cause ed effetti

Definizione – Sistema orientato; ingressi e uscite

Un sistema è **orientato** quando nella sua descrizione sono distinte

- gli **ingressi** u (le *cause*): grandezze che influenzano il sistema;
- le **uscite** y (gli *effetti*): grandezze influenzate dal sistema e che interessa osservare.

Ingressi e uscite possono essere più d'uno. Il modello descrive il legame causale tra ingressi e uscite.



Che cosa sia causa e che cosa effetto dipende dal **punto di vista**: l'orientamento si sceglie, non è dato dal sistema.

Esempio – Condensatore

Per un condensatore di capacità C corrente e tensione sono legate da

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}.$$

Questa è una *relazione* tra i e v , e da sola non dice chi è la causa. L'orientamento nasce dalle relazioni con l'esterno: se si collega un generatore di corrente, la corrente i diventa l'ingresso e la tensione v , che ne è influenzata, l'uscita.

Orientare obbliga a descrivere ingressi, uscite e la *relazione* tra loro, con i rispettivi domini. Lo strumento per farlo in modo univoco è la matematica: il legame tra ciò che entra e ciò che esce è una *funzione* o, più in generale, un *funzionale*.

3 Sistemi dinamici**Definizione – Sistema dinamico**

Un sistema è **dinamico** se le sue condizioni in un certo istante t **non dipendono solo** da ciò che accade in quell'istante (l'ingresso al tempo t), **ma anche dalla storia** precedente del sistema. Entra quindi in gioco il **tempo** t .

Esempio – Il secchio

All'istante t si versa un litro d'acqua in un secchio. Quanta acqua c'è nel secchio? *Dipende da quanta ce n'era prima.* Per rispondere bisogna conoscere la storia: il sistema è dinamico.

Osservazione – Dinamico non significa «che si muove»

Un sistema dinamico può stare fermo, e uno non dinamico può muoversi: dinamico è una caratteristica dell'**effetto delle cause**, non del movimento. Il dondolo si muove, ma se lo si descrive con l'angolo dell'asse la posizione di un seggiolino determina subito quella dell'altro: con questa descrizione non è dinamico.

Nota – I due istanti rilevanti

In un esperimento su un sistema dinamico gli istanti da considerare sono due:

- l'**istante di osservazione** t , in cui si guarda il sistema;
- l'**istante iniziale** t_0 , a partire dal quale si hanno informazioni certe su che cosa sta influenzando il sistema e su come lo sta influenzando.

Se da t_0 si versa nel secchio un litro all'ora, dopo un'ora la quantità d'acqua resta ignota finché non si sa quanta ce n'era in t_0 .

4 Descrizione ingresso-uscita e causalità

Definizione – Causalità

Un sistema è **causale** se l'uscita all'istante t dipende dai valori dell'ingresso fino all'istante t e **non da quelli futuri**: *il futuro non determina il presente*.

Tutti i sistemi fisici conosciuti sono causali. D'ora in poi il sistema studiato è **astratto, orientato, dinamico e causale**.

Definizione – Restrizione di una funzione

Data una funzione del tempo $u(\cdot)$ e un intervallo I , si indica con $u|_I$ la sua **restrizione** a I , cioè il segmento di funzione $\{u(\tau), \tau \in I\}$. Per esempio $u|_{[t_0, t)}$ è l'andamento dell'ingresso da t_0 (incluso) a t (escluso).

Poiché il sistema è dinamico e causale, l'uscita in t è un **funzionale** di tutto l'ingresso passato:

$$y(t) = F(t, u|_{(-\infty, t)}).$$

Fra gli argomenti compare anche t , perché della forma di F non si sa nulla. Con più ingressi e più uscite, ogni uscita y_i è un funzionale di questo tipo, non per forza di tutti gli ingressi.

5 Lo stato

Definizione – Stato

Lo **stato** $x(t_0)$ è una grandezza che racchiude, all'istante t_0 , tutta l'informazione della storia $u|_{(-\infty, t_0)}$ che serve a descrivere il comportamento successivo:

$$u|_{(-\infty, t_0)} \longrightarrow x(t_0).$$

Dice *come sta il sistema* in t_0 ; come ci è arrivato non interessa.

Per il secchio lo stato è la quantità d'acqua presente quando si arriva: non importa se è entrata una goccia al giorno per cent'anni o un litro tutto insieme.

Osservazione – Sufficiente, non completo

Dallo stato non si risale alla storia che lo ha prodotto: dalla quantità d'acqua non si ricostruisce come è stata versata. Lo stato contiene le informazioni **sufficienti** per il seguito, non *tutte* le informazioni.

Con questa scelta, dato t_0 si *assume* che $x(t_0)$ prenda il posto di $u|_{(-\infty, t_0)}$, e la descrizione diventa

$$y(t) = F(t, t_0, x(t_0), u|_{[t_0, t)}). \quad (1)$$

L'ingresso è stato spezzato: la parte prima di t_0 è sostituita dallo stato.

5.1 Sufficienza dello stato: la proprietà di separazione

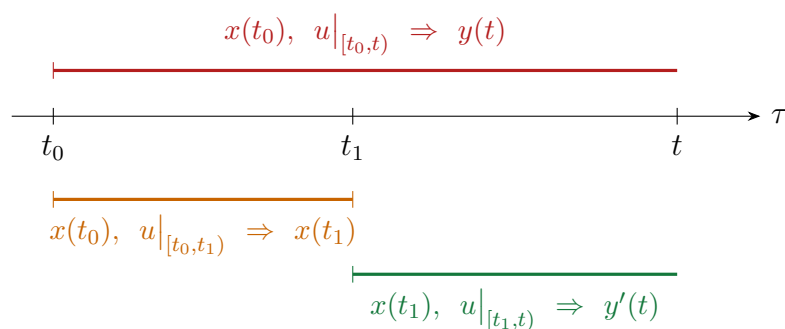
La (1) è un'**ipotesi**: vale spesso, non sempre. Si verifica con la proprietà seguente.

Definizione – Proprietà di separazione

Vale la **proprietà di separazione** se fermarsi in un istante intermedio t_1 e ripartire dallo stato raggiunto $x(t_1)$ dà la stessa uscita dell'esperimento intero, qualunque siano t_1 , lo stato iniziale e l'ingresso:

$$F(t, t_1, x(t_1), u|_{[t_1, t)}) = F(t, t_0, x(t_0), u|_{[t_0, t)}).$$

In questo caso x è una **buona scelta** di stato.



I due esperimenti usano lo stesso ingresso:

1. **intero**: da $x(t_0)$ con $u|_{[t_0, t)}$ si calcola $y(t)$ (in alto nella figura);
2. **spezzato**: da $x(t_0)$ con $u|_{[t_0, t_1)}$ si arriva a $x(t_1)$; poi ci si dimentica di come ci si è arrivati e da $x(t_1)$, con $u|_{[t_1, t)}$, si calcola $y'(t)$ (in basso).

La proprietà chiede $y'(t) = y(t)$.

Osservazione

Non basta che l'uguaglianza valga per un particolare t_1 (potrebbe essere un caso fortunato): deve valere **sempre**. La proprietà non garantisce che lo stato esista; dice che *se* la funzione che rappresenta il sistema la soddisfa, lo stato è sufficiente e il dettaglio del passato non serve.

6 Rappresentazione con lo stato

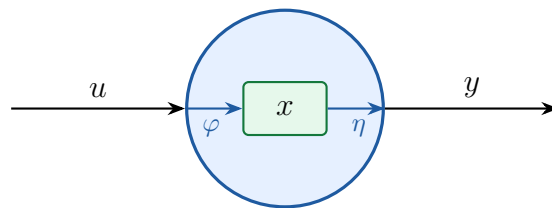
Definizione – Rappresentazione con lo stato

Un sistema dinamico causale è descritto da una **rappresentazione con lo stato**

$$x(t) = \varphi(t, t_0, x(t_0), u|_{[t_0, t)}) \quad (\text{funzione di transizione dello stato})$$

$$y(t) = \eta(t, x(t), u(t)) \quad (\text{trasformazione d'uscita})$$

- φ descrive come evolve lo stato, con la stessa struttura della (1);
- η dà l'uscita all'istante t dallo stato e dall'ingresso nello stesso istante.



L'esperimento spezzato ha bisogno di $x(t_1)$, che la (1) non fornisce: per questo la rappresentazione si divide in due. **La storia la prende x , e da x si ricava y .**

Osservazione – Perché η non contiene la storia

Noto lo stato in t , l'uscita in t dipende da $x(t)$ e da ciò che è successo tra t e t , cioè da *niente*. La dipendenza esplicita da t resta, perché della forma di η non si sa ancora nulla.

In termini di φ la proprietà di separazione dice che comporre due evoluzioni con lo stesso ingresso dà ancora un'evoluzione: per $t_0 \leq t_1 \leq t$

$$\varphi(t, t_0, x(t_0), u|_{[t_0, t)}) = \varphi\left(t, t_1, \underbrace{\varphi(t_1, t_0, x(t_0), u|_{[t_0, t_1)})}_{x(t_1)}, u|_{[t_1, t)}\right).$$

6.1 L'intervallo aperto in t e gli effetti istantanei

L'ingresso all'istante t non influenza lo stato all'istante t : per questo in φ l'intervallo $[t_0, t)$ è **aperto** in t . Il sistema è dinamico, e quando arriva un ingresso le grandezze non cambiano istantaneamente.

Un eventuale **legame diretto** tra ingresso e uscita si mette in η , che è una relazione istantanea, e non nella dinamica. L'alternativa, chiudere l'intervallo in φ , cambierebbe quasi solo le notazioni.

Osservazione – I legami istantanei sono rari

Nei sistemi fisici un effetto davvero istantaneo è quasi impossibile: la lampadina non si accende istantaneamente, e nella carica di un condensatore la tensione non fa un gradino. Il legame diretto compare nei **modelli** come semplificazione: le componenti molto più veloci delle altre si trattano come istantanee e si mettono in η , invece di descriverne la dinamica.

7 Stazionarietà

Un sistema è **stazionario** se *lo stesso esperimento, fatto in qualunque momento, dà lo stesso risultato*. La proprietà riguarda la dipendenza *esplicita* di φ ed η dal tempo, cioè da t e t_0 scritti fra gli argomenti, non quella attraverso $x(t)$, $u(t)$, $u|_{[t_0, t)}$.

7.1 L'esperimento traslato nel tempo

L'esperimento originale va da t_0 a t , parte da $x(t_0)$ con ingresso $u|_{[t_0, t)}$. Lo stesso esperimento spostato di Δ :

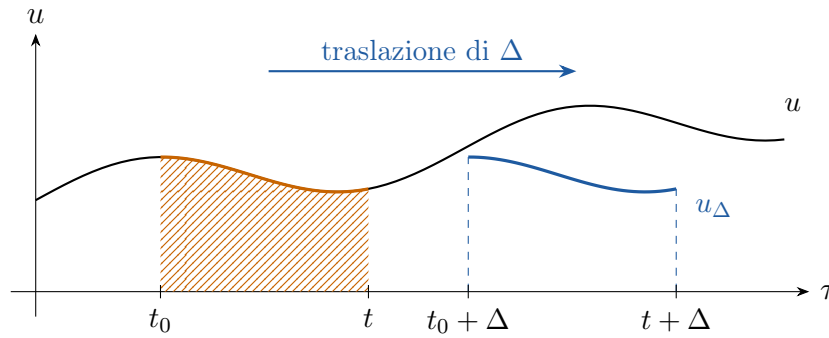
- inizia in $t_0 + \Delta$ e finisce in $t + \Delta$ (stessa durata);
- parte dallo **stesso stato iniziale** $x(t_0)$, non da « $x(t_0 + \Delta)$ »: altrimenti non sarebbe lo stesso esperimento;
- usa lo **stesso ingresso, traslato**: non il pezzo di u su $[t_0 + \Delta, t + \Delta)$, ma il vecchio pezzo spostato in avanti di Δ .

Definizione – Ingresso traslato

Dato l'ingresso $u(\cdot)$ e $\Delta \in \mathbb{R}$, l'**ingresso traslato** di Δ è

$$u_{\Delta}(\tau) := u(\tau - \Delta).$$

Il suo pezzo su $[t_0 + \Delta, t + \Delta)$ coincide, punto per punto, con il pezzo di u su $[t_0, t)$ spostato in avanti di Δ .



In arancione il pezzo di ingresso dell'esperimento originale; in blu lo stesso pezzo traslato di Δ .
Il tratto di u (nero) su $[t_0 + \Delta, t + \Delta)$ non va usato.

Definizione – Sistema stazionario

Una rappresentazione con lo stato è **stazionaria** se, **per ogni** $\Delta \in \mathbb{R}$ (e per ogni $t_0 \leq t$, $x(t_0)$, u), l'esperimento traslato dà lo stesso risultato dell'originale:

$$\begin{aligned} \varphi(t + \Delta, t_0 + \Delta, x(t_0), u_{\Delta}|_{[t_0 + \Delta, t + \Delta)}) &= \varphi(t, t_0, x(t_0), u|_{[t_0, t)}), \\ \eta(t + \Delta, x, u) &= \eta(t, x, u). \end{aligned}$$

Nella seconda si mettono lo stesso stato e lo stesso valore d'ingresso in un altro istante.

L'uguaglianza deve valere per *ogni* Δ : un sistema che si ripete uguale solo dopo un periodo non è stazionario.

7.2 Conseguenza: conta solo la durata

Definizione – Rappresentazione stazionaria

Per un sistema stazionario la rappresentazione con lo stato si scrive

$$x(t) = \varphi(t - t_0, x(t_0), u|_{[t_0, t)}), \quad y(t) = \eta(x(t), u(t)).$$

Non contano l'istante d'inizio e quello d'osservazione, ma la **durata dell'esperimento** $t - t_0$: φ passa da quattro argomenti a tre.

Si ottiene scegliendo nella definizione un Δ particolare, lecito perché la proprietà vale per ogni Δ :

- per φ , $\Delta = -t_0$ riporta l'esperimento a partire da 0:

$$x(t) = \varphi(t - t_0, 0, x(t_0), u_{-t_0}|_{[0, t - t_0)});$$

- per η , $\Delta = -t$ dà $y(t) = \eta(0, x(t), u(t))$.

Nota – Abuso di notazione

A rigore, dopo la scelta $\Delta = -t_0$ l'ingresso in φ è il pezzo di u riportato su $[0, t - t_0]$. Si continua a scrivere $u|_{[t_0, t]}$, sottintendendo che conta solo l'andamento sull'intervallo, non la sua posizione sull'asse dei tempi.

7.3 Stazionarietà e scelta del modello

La stazionarietà dipende anche da **come si costruisce il modello**.

Esempio – Aereo e carburante

Scrivendo per un aereo l'equazione del moto $F = Ma$, la massa M non è costante, perché l'aereo consuma carburante: lo stesso esperimento di accelerazione, ripetuto più tardi, dà risultati diversi e il modello non è stazionario. Diventa stazionario se la quantità di carburante è una delle grandezze descritte: a parità di carburante, lo stesso esperimento dà lo stesso risultato.

Molti sistemi non stazionari, su un intervallo di tempo limitato, variano così poco da essere *di fatto* stazionari. Nel corso i sistemi sono **sempre stazionari**.

8 Linearità**Definizione – Rappresentazione lineare**

La rappresentazione stazionaria è **lineare** se, per ogni scelta di stati iniziali $x_1(t_0)$, $x_2(t_0)$, di ingressi u_1, u_2 , di coefficienti α, β e di istanti $t_0 \leq t$,

$$\varphi(t - t_0, \alpha x_1(t_0) + \beta x_2(t_0), \alpha u_1|_{[t_0, t]} + \beta u_2|_{[t_0, t]}) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t),$$

$$\eta(\alpha x_1(t) + \beta x_2(t), \alpha u_1(t) + \beta u_2(t)) = \alpha \eta(x_1(t), u_1(t)) + \beta \eta(x_2(t), u_2(t)),$$

dove $x_i(t) = \varphi(t - t_0, x_i(t_0), u_i|_{[t_0, t]})$. In parole: *la combinazione di esperimenti è un esperimento*, e la risposta alla combinazione è la combinazione delle risposte.

È la definizione di funzione lineare, $f(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2)$, estesa al principio di sovrapposizione degli effetti.

Osservazione – Si combinano stato e ingresso insieme

Le *cause* sono tutto ciò che determina l'effetto: **dove si trova il sistema** (lo stato iniziale) e **ciò che gli si applica** (l'ingresso). La linearità si valuta sull'intero dominio: si cambiano *entrambi* gli argomenti con la stessa combinazione, non uno solo lasciando fermo l'altro. Come ogni ipotesi va verificata: molti sistemi non sono lineari.

8.1 Evoluzione libera ed evoluzione forzata**Definizione – Evoluzione libera e forzata**

Dati uno stato iniziale $x(t_0)$ e un ingresso u :

- l'**evoluzione libera** parte da $x(t_0)$ con **ingresso nullo**:

$$\varphi_L(t - t_0, x(t_0)) := \varphi(t - t_0, x(t_0), 0);$$

- l'**evoluzione forzata** applica u partendo dallo **stato nullo**:

$$\varphi_F(t - t_0, u|_{[t_0, t]}) := \varphi(t - t_0, 0, u|_{[t_0, t]}).$$

Esempio – Il secchio

Arrivare con tre litri nel secchio e versarci acqua si studia in due pezzi:

- evoluzione libera: il secchio parte da tre litri e non si fa niente (se ha un buco, si svuota da solo);
- evoluzione forzata: il secchio parte vuoto e lo si riempie.

Proposizione – Libera più forzata

Se la rappresentazione è lineare, per ogni $x(t_0)$ e ogni ingresso

$$x(t) = \varphi_L(t - t_0, x(t_0)) + \varphi_F(t - t_0, u|_{[t_0, t]}).$$

Allo stesso modo, con $\eta_L(x(t)) := \eta(x(t), 0)$ e $\eta_F(u(t)) := \eta(0, u(t))$,

$$y(t) = \eta_L(x(t)) + \eta_F(u(t)).$$

Dimostrazione

Si applica la definizione di linearità, con $\alpha = \beta = 1$, ai due esperimenti seguenti:

	esperimento libero	esperimento forzato	somma
stato iniziale	$x(t_0)$	0	$x(t_0)$
ingresso	0	$u _{[t_0,t]}$	$u _{[t_0,t]}$
stato in t	φ_L	φ_F	$\varphi_L + \varphi_F$

Per la linearità l'esperimento della colonna «somma» ha come risultato la somma dei risultati. Ma è l'esperimento completo, che dà $x(t)$: quindi $x(t) = \varphi_L + \varphi_F$. Per l'uscita si ragiona allo stesso modo con $(x(t), 0)$ e $(0, u(t))$. $\square$

La proprietà di separazione compone due evoluzioni **in cascata**, una dopo l'altra; la linearità le mette **in parallelo**, sullo stesso intervallo, e le somma.

Osservazione – Linearità senza stazionarietà

La separazione si ottiene dalla sola linearità, con la stessa scelta. Per un sistema lineare ma non stazionario restano t e t_0 separati:

$$\begin{aligned} x(t) &= \varphi_L(t, t_0, x(t_0)) + \varphi_F(t, t_0, u|_{[t_0,t]}), \\ y(t) &= \eta_L(t, x(t)) + \eta_F(t, u(t)), \end{aligned}$$

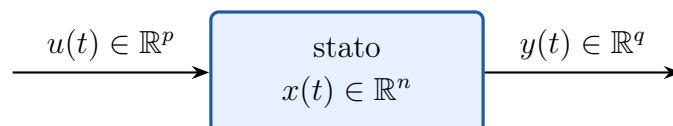
con $\varphi_L(t, t_0, x(t_0)) := \varphi(t, t_0, x(t_0), 0)$ e le altre definite allo stesso modo.

8.2 Spazi lineari per stato, ingresso e uscita

Definizione – Spazio di stato e spazi di ingresso e uscita

Per combinare linearmente stati, ingressi e uscite, questi devono stare in spazi lineari:

- lo stato sta nello **spazio di stato**, di dimensione n : $x(t) \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$, cioè lo stato ha n componenti;
- i segmenti di ingresso stanno in uno spazio lineare di funzioni: $u|_{[t_0,t]} \in \mathcal{U}_{[t_0,t]}$, funzioni su $[t_0, t]$ a valori in $\mathbb{R}^p$;
- $u(t) \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^p$ (p **ingressi**) e $y(t) \in \mathcal{Y} \subseteq \mathbb{R}^q$ (q **uscite**).



Gli ingressi e le uscite «tanti» del sistema orientato sono le componenti dei vettori $u(t)$ e $y(t)$: con quattro ingressi, $u(t)$ ha quattro componenti. Non vanno confusi $u|_{[t_0, t)}$, un segmento di funzione, e $u(t)$, il suo valore in un istante.

L'uscita contiene solo gli effetti che *interessa vedere*: di un'automobile che parcheggia interessa la posizione, non tutte le grandezze che la descrivono. Per questo l'uscita è tipicamente «più piccola» dello stato, e spesso p e q valgono 1.

Riepilogo

- **Sistema orientato**: ingressi u (cause) e uscite y (effetti), secondo un punto di vista.
- **Dinamico**: le condizioni in t dipendono dalla storia.
- **Causale**: l'uscita in t non dipende dall'ingresso futuro.
- **Stato** $x(t_0)$: riassume di $u|_{(-\infty, t_0)}$ ciò che serve al seguito; è sufficiente se vale la **separazione** $\forall t_1$.
- **Forma generale**: $x(t) = \varphi(t, t_0, x(t_0), u|_{[t_0, t)})$, $y(t) = \eta(t, x(t), u(t))$; $u(t)$ agisce su $y(t)$, non su $x(t)$.
- **Stazionario**: lo stesso esperimento traslato di Δ dà lo stesso risultato $\forall \Delta$; conta $t - t_0$.
- **Forma stazionaria**: $x(t) = \varphi(t - t_0, x(t_0), u|_{[t_0, t)})$, $y(t) = \eta(x(t), u(t))$.
- **Lineare**: la combinazione di esperimenti (stato e ingresso) è un esperimento; $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^p$, $y(t) \in \mathbb{R}^q$ in spazi lineari.
- **Forma lineare** (libera + forzata): $x(t) = \varphi_L(t - t_0, x(t_0)) + \varphi_F(t - t_0, u|_{[t_0, t)})$, $y(t) = \eta_L(x(t)) + \eta_F(u(t))$.