

Appunti di Sistemi Dinamici

Canale 1 · Prof. Paolo Di Giamberardino

Capitolo 10: La trasformata Z

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dalle lezioni in aula e dal materiale del corso

Argomenti: Definizione e linearità · Impulso e gradino
Anticipo e ritardo · Il sistema nel dominio di z

Indice

1	Definizione e linearità	1
2	Impulso e gradino	2
3	Anticipo e ritardo	3
4	Il sistema nel dominio di z	4
5	Esercizi	7
6	Soluzioni	8

A tempo discreto la risposta forzata è una somma di convoluzione, matrice per vettore, da rifare per ogni ingresso. La trasformata Z fa per le successioni quello che la trasformata di Laplace fa per le funzioni del tempo continuo: quella somma diventa un prodotto.

1 Definizione e linearità

Definizione – Trasformata Z

La **trasformata Z** di una successione $f(t)$, definita per gli interi $t \geq 0$, è la funzione della variabile complessa z

$$F(z) = \mathcal{Z}[f(t)] := \sum_{t=0}^{+\infty} f(t) z^{-t}$$

definita per gli z in cui la serie converge, cioè fuori da un cerchio, $|z| > \rho_f$.

Al posto dell'integrale c'è la serie, al posto di e^{-st} la potenza z^{-t} . Un vettore o una matrice di successioni si trasforma elemento per elemento. La convergenza dipende solo da $|z|$, perché il fattore z^{-t} cresce o decresce con il modulo e la fase lo fa solo girare: dove Laplace ha un semipiano $\operatorname{Re} s > \alpha_f$, qui c'è l'esterno di un cerchio di raggio ρ_f .

Proposizione – Linearità e unicità

1. Per costanti a, b e successioni f, g :

$$\mathcal{Z}[a f(t) + b g(t)] = a F(z) + b G(z).$$

2. Due successioni con la stessa trasformata coincidono per $t \geq 0$: da $F(z)$ si torna a una sola successione.

La linearità segue dalla linearità della somma. Come in Laplace, la trasformata guarda solo $t \geq 0$: le successioni si considerano nulle prima di 0, cioè della forma $f(t) \delta_{-1}(t)$, con il gradino della Sezione 2.

2 Impulso e gradino

Definizione – Impulso e gradino a tempo discreto

L'**impulso** discreto vale 1 in $t = 0$ e 0 altrove; il **gradino** discreto vale 1 da 0 in poi:

$$\delta(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases} \quad \delta_{-1}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

A differenza dell'impulso di Dirac, l'impulso discreto è una successione come le altre.

Proposizione – Trasformate dell'impulso e del gradino

$f(t)$	$F(z)$	dove
$\delta(t)$	$\boxed{1}$	ogni z
$\delta_{-1}(t)$	$\boxed{\frac{z}{z-1}}$	$ z > 1$

Dimostrazione

1. **Impulso.** Nella serie resta il solo termine $t = 0$, che vale $1 \cdot z^0 = 1$.
2. **Gradino.** La serie $\sum_{t \geq 0} z^{-t}$ è geometrica di ragione z^{-1} e converge se e solo se $|z^{-1}| < 1$, cioè $|z| > 1$, con somma

$$\frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}.$$

□

Osservazione – Il gradino non è strettamente proprio

In Laplace il gradino è $\frac{1}{s}$, razionale strettamente propria. In z è $\frac{z}{z-1}$: razionale, ma con numeratore e denominatore dello stesso grado, quindi propria e non strettamente propria.

3 Anticipo e ritardo

Teorema – Anticipo

Se $F(z) = \mathcal{Z}[f(t)]$,

$$\mathcal{Z}[f(t+1)] = z F(z) - z f(0)$$

Dimostrazione

1. **Si cambia indice** con $\tau = t + 1$, che va da 1 a $+\infty$:

$$\sum_{t=0}^{+\infty} f(t+1) z^{-t} = \sum_{\tau=1}^{+\infty} f(\tau) z^{-(\tau-1)} = z \sum_{\tau=1}^{+\infty} f(\tau) z^{-\tau}.$$

2. **Manca il primo termine.** La somma da 1 è $F(z)$ senza il termine $\tau = 0$, che vale $f(0) z^0 = f(0)$: quindi è $F(z) - f(0)$.

□

L'anticipo fa per la forma alle differenze quello che il teorema della derivata fa per la forma differenziale: $x(t+1)$ diventa $z X(z)$, meno un termine con il valore iniziale.

Teorema – Ritardo

Se $F(z) = \mathcal{Z}[f(t)]$ e $T \geq 0$ è intero,

$$\mathcal{Z}[f(t-T) \delta_{-1}(t-T)] = z^{-T} F(z)$$

Dimostrazione

1. **La somma parte da T** , perché prima la successione è nulla:

$$\mathcal{Z}[f(t-T) \delta_{-1}(t-T)] = \sum_{t=T}^{+\infty} f(t-T) z^{-t}.$$

2. **Si cambia indice** con $\tau = t - T$, che va da 0 a $+\infty$:

$$\sum_{\tau=0}^{+\infty} f(\tau) z^{-(\tau+T)} = z^{-T} \sum_{\tau=0}^{+\infty} f(\tau) z^{-\tau} = z^{-T} F(z).$$

□

Un anticipo di un passo moltiplica per z , un ritardo di un passo per z^{-1} , e l'operazione inversa resta inversa: ritardando $f(t) \delta_{-1}(t)$ di un passo si ottiene $g(t)$ con $g(0) = 0$, e

anticipando g il termine $z g(0)$ sparisce e si ritrova $z \cdot z^{-1} F(z) = F(z)$. A tempo continuo il ritardo è il fattore e^{-sT} , non razionale; qui z^{-T} è razionale.

4 Il sistema nel dominio di z

Teorema – La rappresentazione in z

Per $x(t+1) = Ax(t) + Bu(t)$, $y(t) = Cx(t) + Du(t)$ con $x(0) = x_0$, per $|z|$ maggiore dei moduli degli autovalori di A e del raggio di convergenza di $U(z)$:

$$\begin{aligned} X(z) &= z(zI - A)^{-1}x_0 + (zI - A)^{-1}BU(z) \\ Y(z) &= C z(zI - A)^{-1}x_0 + (C(zI - A)^{-1}B + D)U(z) \end{aligned}$$

Dimostrazione

1. **Si trasformano i due membri.** Per la linearità e il teorema dell'anticipo:

$$zX(z) - zx_0 = AX(z) + BU(z), \quad Y(z) = CX(z) + DU(z).$$

2. **Si raccoglie $X(z)$:** $(zI - A)X(z) = zx_0 + BU(z)$.
3. **Si inverte.** $\det(zI - A) = 0$ solo negli autovalori di A ; per gli altri z si moltiplica a sinistra per $(zI - A)^{-1}$ e si sostituisce $X(z)$ in $Y(z)$.

□

Come in s , la parte con x_0 è l'evoluzione libera e quella con $U(z)$ la forzata.

Proposizione – Le matrici della forma esplicita in z

Le trasformate delle matrici della forma esplicita a tempo discreto (Capitolo 6) sono

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \mathcal{Z}[A^t] = z(zI - A)^{-1}, & H(z) &= (zI - A)^{-1}B, \\ \Psi(z) &= C z(zI - A)^{-1}, & W(z) &= C(zI - A)^{-1}B + D \end{aligned}$$

e la somma di convoluzione diventa il prodotto: $\mathcal{Z}\left[\sum_{\tau=0}^{t-1} H(t-\tau)u(\tau)\right] = H(z)U(z)$. $W(z)$ è la **funzione di trasferimento** del sistema a tempo discreto.

Dimostrazione

1. **Forma esplicita.** Con $t_0 = 0$, $x(t) = A^t x_0 + \sum_{\tau=0}^{t-1} H(t-\tau) u(\tau)$, e l'uscita $y(t) = \Psi(t) x_0 + \sum_{\tau=0}^{t-1} C H(t-\tau) u(\tau) + D u(t)$.
2. **Evoluzione libera.** Con $u = 0$ il teorema dà $\mathcal{Z}[A^t x_0] = z(zI - A)^{-1} x_0$ per ogni x_0 ; con x_0 uguale, a turno, ai vettori della base canonica si ottiene $\Phi(z)$, e $\Psi(z) = C \Phi(z)$.
3. **Evoluzione forzata.** Con $x_0 = 0$, per ogni ingresso la trasformata della somma è $(zI - A)^{-1} B U(z)$.
4. **$H(z)$ con il ritardo.** $H(t) = A^{t-1} B$ per $t \geq 1$ e la somma non usa $H(0)$, quindi $H(t)$ è $A^t B$ ritardata di un passo:

$$\mathcal{Z}[A^{t-1} \delta_{-1}(t-1) B] = z^{-1} z (zI - A)^{-1} B = (zI - A)^{-1} B,$$

lo stesso $H(z)$ del punto 3.

□

Osservazione – $W(z)$ è la trasformata della risposta impulsiva

Dallo stato nullo, con l'impulso discreto in ingresso, $U(z) = 1$ e quindi $Y(z) = W(z)$. Infatti la risposta impulsiva $W(0) = D$, $W(t) = C A^{t-1} B$ per $t \geq 1$ (Capitolo 6) è $D \delta(t) + C H(t)$, che ha trasformata $D + C(zI - A)^{-1} B$.

Osservazione – Il caso scalare

Con $n = 1$ e $A = a$, $\Phi(z)$ dà $\mathcal{Z}[a^t] = \frac{z}{z-a}$, che è la serie geometrica $\sum_t (a/z)^t$ e converge per $|z| > |a|$. Con $a = 1$ si ritrova il gradino della Sezione 2. Per questo la serie di A^t converge quando $|z|$ supera i moduli degli autovalori.

Le formule hanno la struttura di quelle in s (Capitolo 8), con z al posto di s :

	tempo continuo, in s	tempo discreto, in z
trasformata	$\int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$	$\sum_{t \geq 0} f(t) z^{-t}$
dove converge	$\operatorname{Re} s > \alpha_f$	$ z > \rho_f$
passo dell'equazione	$\dot{x} \rightarrow sX(s) - x(0)$	$x(t+1) \rightarrow zX(z) - zx(0)$
ritardo di T	e^{-sT}	z^{-T}
evoluzione libera	$\Phi(s) = (sI - A)^{-1}$	$\Phi(z) = z(zI - A)^{-1}$
forzata nello stato	$H(s) = (sI - A)^{-1}B$	$H(z) = (zI - A)^{-1}B$
funzione di trasferimento	$C(sI - A)^{-1}B + D$	$C(zI - A)^{-1}B + D$
impulso, gradino	$1, \frac{1}{s}$	$1, \frac{z}{z-1}$

$H(z)$ e $W(z)$ sono identiche a $H(s)$ e $W(s)$ con z al posto di s ; nell'evoluzione libera c'è un fattore z in più, perché l'anticipo toglie $zx(0)$ e non $x(0)$. L'Esercizio 1 calcola $W(z)$ di un sistema campionato e la sua risposta al gradino.

Riepilogo

- **Definizione:** $F(z) = \sum_{t \geq 0} f(t) z^{-t}$, per $|z| > \rho_f$, lineare.
- **Impulso e gradino:** $\delta \rightarrow 1$, $\delta_{-1} \rightarrow \frac{z}{z-1}$ per $|z| > 1$.
- **Anticipo:** $f(t+1) \rightarrow zF(z) - zf(0)$.
- **Ritardo:** $f(t-T) \delta_{-1}(t-T) \rightarrow z^{-T}F(z)$.
- **Sistema in z :** $X(z) = \Phi(z)x_0 + H(z)U(z)$, $Y(z) = \Psi(z)x_0 + W(z)U(z)$.
- **Matrici:** $\Phi(z) = z(zI - A)^{-1}$, $H(z) = (zI - A)^{-1}B$, $W(z) = C(zI - A)^{-1}B + D$.

5 Esercizi

Esercizio 1 – Appello del 05/04/2024, Canale 1, Prof. Paolo Di Giamberardino, esercizio 3

Dato il sistema a tempo continuo rappresentato da

$$W(s) = \frac{10}{s^2}$$

se ne calcoli l'equivalente tempo discreto ottenuto campionandolo con tempo di campionamento $T = 0.1$ s e si calcoli la risposta forzata all'ingresso (discreto) $u(t) = 2\delta_{-1}(t)$.

Soluzione a pagina 8 →

6 Soluzioni

Soluzione dell'Esercizio 1 – Appello del 05/04/2024, Canale 1, Prof. Paolo Di Giamberardino, esercizio 3

Uno stato. Con stato nullo, per il teorema della derivata applicato due volte $s^2 Y(s) = 10 U(s)$ è la trasformata di $\ddot{y} = 10 u$. Con $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = 0,$$

e infatti $C(sI - A)^{-1}B = \frac{10}{s^2}$. La risposta campionata non dipende da questa scelta: è la risposta forzata del sistema continuo all'ingresso mantenuto, che dipende solo da $W(s)$.

Il sistema campionato. $A^2 = 0$, quindi $e^{A\theta} = I + A\theta$ e

$$A_D = e^{AT} = \begin{pmatrix} 1 & 0.1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_D = \int_0^T \begin{pmatrix} 10\theta \\ 10 \end{pmatrix} d\theta = \begin{pmatrix} 5T^2 \\ 10T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.05 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Funzione di trasferimento. $C(zI - A_D)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0.1 \\ z-1 & (z-1)^2 \end{pmatrix}$, quindi

$$W(z) = C(zI - A_D)^{-1}B_D = \frac{0.05}{z-1} + \frac{0.1}{(z-1)^2} = \frac{0.05(z+1)}{(z-1)^2}.$$

Risposta forzata. Con k il passo, come nel Capitolo 7, e $A_D^j = \begin{pmatrix} 1 & 0.1j \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $CA_D^j B_D = 0.05 + 0.1j$, e la somma del Capitolo 6 con $u = 2$ dà

$$y(k) = \sum_{j=0}^{k-1} 2(0.05 + 0.1j) = 0.1k + 0.1k(k-1) = 0.1k^2,$$

cioè $10(kT)^2$: i campioni di $10t^2$, la risposta continua al gradino di ampiezza 2, perché $\frac{10}{s^2} \cdot \frac{2}{s} = \frac{20}{s^3}$.

Controllo in z . $U(z) = \frac{2z}{z-1}$ e

$$Y(z) = W(z)U(z) = \frac{0.1z(z+1)}{(z-1)^3} = 0.1(z^{-1} + 4z^{-2} + 9z^{-3} + \dots),$$

i cui coefficienti sono proprio $y(k) = 0.1k^2$.

[← Torna all'Esercizio 1, pagina 7](#)