

Appunti di Sistemi Dinamici

Canale 1 · Prof. Paolo Di Giamberardino

Capitolo 2: Rappresentazione esplicita dei sistemi lineari stazionari

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dalle lezioni in aula e dal materiale del corso

Argomenti: Tempo continuo, discreto e campionato · Evoluzione libera e forzata
Trasformazione d'uscita $y = Cx + Du$ · Matrice di transizione
Evoluzione forzata a tempo discreto e continuo · Impulso di Dirac e matrice W
Risposte impulsive · Proprietà di semigruppò · Causalità e memoria

Indice

1	Tempo continuo, discreto e campionato	1
2	Evoluzione libera e forzata	1
3	La trasformazione d'uscita: $y = Cx + Du$	2
4	L'evoluzione libera: la matrice di transizione	2
5	L'evoluzione forzata a tempo discreto	3
5.1	Derivazione	3
6	L'evoluzione forzata a tempo continuo	4
7	La forma esplicita dell'uscita	5
7.1	Il contributo diretto dell'ingresso	5
7.2	Tempo discreto: la matrice W	6
8	L'impulso di Dirac e la matrice W a tempo continuo	7
8.1	Tempo continuo: la matrice W	7
9	Le risposte impulsive	9
10	I vincoli su Φ e H	10
11	Causalità e memoria	11
12	Esercizi	13
13	Soluzioni	14

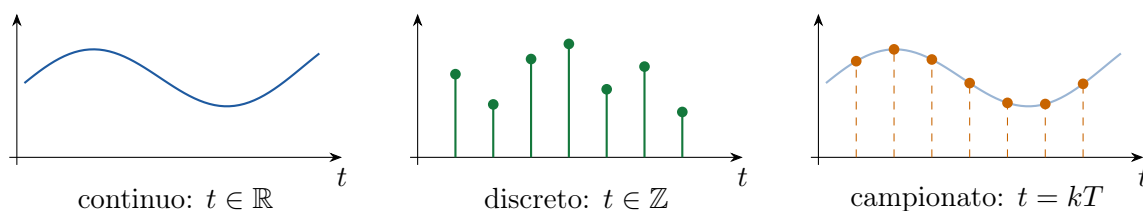
1 Tempo continuo, discreto e campionato

Definizione – Tempo continuo, discreto, campionato

- **Tempo continuo**, $t \in \mathbb{R}$: il sistema evolve e si può conoscere in ogni istante.
- **Tempo discreto**, $t \in \mathbb{Z}$: il sistema si aggiorna solo in istanti distinti; **fra un istante e il successivo non evolve**, e lì non è nemmeno definito.
- **Campionato**: il sistema è continuo, ma lo si osserva solo in istanti scelti da chi osserva, di solito a passo fisso T ($t = kT$). Fra due osservazioni **continua a evolvere**.

Esempio – La media dei voti

Ingresso: il voto di un esame; uscita: la media. La media cambia *solo* quando si sostiene un esame. Gli esami cadono a intervalli irregolari, ma non conta: gli istanti di aggiornamento si numerano $1, 2, 3, \dots$, e il tempo del sistema è l'indice dell'esame, non l'ora dell'orologio.



2 Evoluzione libera e forzata

Per un sistema lineare e stazionario (Capitolo 1) le due φ e le due η sono funzioni diverse, e prendono un pedice:

$$x(t) = \varphi_L(t - t_0, x(t_0)) + \varphi_F(t - t_0, u|_{[t_0, t)}), \quad y(t) = \eta_L(x(t)) + \eta_F(u(t)).$$

- L sta per **libero**: φ_L è ciò che il sistema fa *da solo* a partire dallo stato iniziale; η_L dipende solo dallo stato.
- F sta per **forzato**: φ_F dipende solo da come il sistema è forzato dall'esterno; η_F dipende solo dall'ingresso.

Qui $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^p$, $y(t) \in \mathbb{R}^q$.

3 La trasformazione d'uscita: $y = Cx + Du$

Proposizione – Trasformazione d'uscita di un sistema lineare stazionario

A tempo continuo e a tempo discreto

$$\eta_L(x(t)) = Cx(t), \quad \eta_F(u(t)) = Du(t), \quad \boxed{y(t) = Cx(t) + Du(t)}$$

con C matrice $q \times n$ (dallo stato all'uscita) e D matrice $q \times p$ (legame diretto dall'ingresso all'uscita), entrambe **costanti**.

Dimostrazione

1. **Linearità.** η_L è lineare e manda un vettore di $\mathbb{R}^n$ in uno di $\mathbb{R}^q$. L'unica funzione lineare fra vettori è il prodotto per una matrice (come $y = kx$ nel caso scalare): $\eta_L(x) = Cx$, con C di $q \times n$. Allo stesso modo $\eta_F(u) = Du$, con D di $q \times p$.
2. **Stazionarietà.** η non dipende da t , quindi C e D sono **costanti**.
3. **Istantaneità.** η lega valori nello stesso istante e non guarda che cosa succede fra un istante e l'altro: il risultato vale uguale a tempo continuo e discreto.

Servono solo linearità e stazionarietà: $y = Cx + Du$ vale per *tutti* i sistemi lineari e stazionari. $\square$

Osservazione – Se il sistema fosse lineare ma non stazionario

La linearità spezzerebbe ancora $\eta(t, x, u) = \eta(t, x, 0) + \eta(t, 0, u)$, ma il t non sparirebbe: in ogni istante la funzione lineare, cioè la matrice, sarebbe un'altra,

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t).$$

4 L'evoluzione libera: la matrice di transizione

Definizione – Matrice di transizione

Per un sistema lineare e stazionario

$$\varphi_L(t - t_0, x(t_0)) = \Phi(t - t_0)x(t_0),$$

con $\Phi(\cdot)$ matrice $n \times n$ funzione della sola durata $t - t_0$: la **matrice di transizione** dello stato.

φ_L è lineare nello stato iniziale, quindi è una matrice per $x(t_0)$. La matrice non è costante, perché lo stato raggiunto cambia con la durata dell'esperimento. Che dipenda da $t - t_0$ non contraddice la stazionarietà: $t - t_0$ non è un istante, è quanto tempo è passato.

5 L'evoluzione forzata a tempo discreto

Proposizione – Evoluzione dello stato a tempo discreto

$$x(t) = \Phi(t - t_0) x(t_0) + \sum_{\tau=t_0}^{t-1} H(t - \tau) u(\tau)$$

con $H(\cdot)$ matrice $n \times p$. Il primo termine è l'evoluzione libera, la somma è l'evoluzione forzata φ_F .

A tempo discreto il segmento di ingresso è una sequenza finita di valori:

$$u|_{[t_0, t)} = (u(t_0), u(t_0 + 1), \dots, u(t - 1)).$$

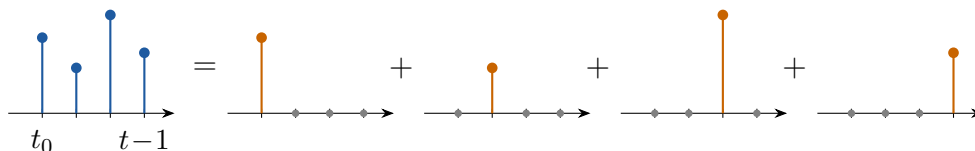
L'ultimo valore è $u(t - 1)$ perché l'intervallo è aperto in t : $u(t)$ non entra nello stato all'istante t .

5.1 Derivazione

1. **Scomposizione.** Si scrive la sequenza come somma di sequenze con un solo valore non nullo:

$$u|_{[t_0, t)} = (u(t_0), 0, \dots, 0) + (0, u(t_0 + 1), 0, \dots, 0) + \dots + (0, \dots, 0, u(t - 1)).$$

2. **Linearità.** La risposta alla sequenza completa è la somma delle risposte alle sequenze elementari. Per causalità ciascuna non dipende dai valori che arrivano dopo.
3. **Un solo valore.** La risposta a una sequenza elementare è lineare in un solo vettore, quindi è una matrice per quel vettore, che dipende da quanto quel valore agisce.



I contributi dei singoli valori sono:

- $u(t_0)$ arriva in t_0 e agisce per una durata $t - t_0$: dà $H(t - t_0) u(t_0)$;
- $u(t_0 + 1)$ arriva in $t_0 + 1$ e agisce per $t - (t_0 + 1)$: dà $H(t - (t_0 + 1)) u(t_0 + 1)$;

- l'ultimo, $u(t-1)$, agisce per una durata 1: dà $H(1)u(t-1)$.

Sommando e chiamando τ l'istante di arrivo di ciascun valore si ottiene la somma della proposizione.

Nota – Errore tipico

Il contributo di $u(t_0+1)$ non è $H(t-t_0)u(t_0+1)$: scritto così, il valore sarebbe arrivato in t_0 , mentre fino a t_0+1 non c'era.

Il contributo di ciascun valore dipende solo dalla **distanza** $t-\tau$ fra l'istante in cui l'ingresso è applicato e quello in cui si osserva lo stato, non da τ : è la stazionarietà. Tutta l'evoluzione forzata sta in una sola funzione, $H(\cdot)$.

6 L'evoluzione forzata a tempo continuo

Proposizione – Evoluzione dello stato a tempo continuo

$$x(t) = \Phi(t-t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t H(t-\tau)u(\tau) d\tau$$

con $\Phi(\cdot)$ matrice $n \times n$ e $H(\cdot)$ matrice $n \times p$.

Come nel caso discreto, con la somma che diventa un integrale: ogni $u(\tau)$ agisce per un tempo $d\tau$ e contribuisce con $H(t-\tau)u(\tau)d\tau$.

L'integrale è **lineare** nell'ingresso, come deve essere φ_F , e non dipende dal valore in un solo punto: che l'intervallo sia aperto o chiuso in t non cambia nulla.

Osservazione – Perché cambia solo la forma dello stato

$y = Cx + Du$ è la stessa nei due casi perché è istantanea. φ_F invece è una funzione di un segmento di funzione, che a tempo discreto è una sequenza e a tempo continuo una curva: nel primo caso si somma, nel secondo si integra.

Osservazione – Si può porre $t_0 = 0$

In un sistema stazionario lo stesso esperimento dà lo stesso risultato in qualunque momento: si può far partire il cronometro all'inizio, $t_0 = 0$. Con $x_0 := x(0)$

$$x(t) = \Phi(t) x_0 + \int_0^t H(t - \tau) u(\tau) d\tau :$$

scompare t_0 , ma la variabile di integrazione resta. In un sistema tempo-variante non si può fare: l'istante di inizio conta.

Anche con t_0 qualsiasi lo stato iniziale $x(t_0)$ si abbrevia spesso in x_0 : quale sia l'istante iniziale si legge dagli estremi dell'integrale.

7 La forma esplicita dell'uscita

Definizione – Matrice Ψ

$$\Psi(t - t_0) := C \Phi(t - t_0), \quad \text{matrice } q \times n.$$

È l'evoluzione libera vista dall'uscita: porta lo stato iniziale $x(t_0)$ direttamente in $y(t)$.

Definizione – Rappresentazione esplicita

Sostituendo $x(t)$ in $y = Cx + Du$ e portando C dentro la somma o l'integrale:

$$\begin{aligned} \text{discreto: } y(t) &= \Psi(t - t_0) x(t_0) + \sum_{\tau=t_0}^{t-1} C H(t - \tau) u(\tau) + D u(t), \\ \text{continuo: } y(t) &= \Psi(t - t_0) x(t_0) + \int_{t_0}^t C H(t - \tau) u(\tau) d\tau + D u(t). \end{aligned}$$

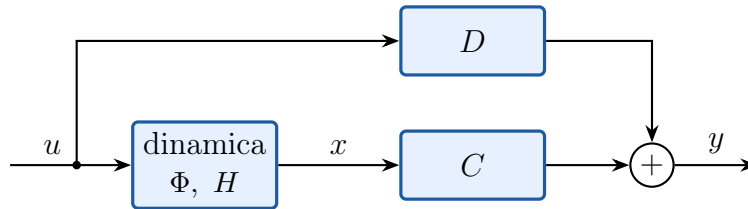
Queste espressioni e quelle di $x(t)$ sono la **rappresentazione in forma esplicita**: danno lo stato e l'uscita a partire dallo stato iniziale e dall'ingresso.

Per calcolare l'uscita non serve passare dallo stato: basta la sua forma esplicita. Esercizio 1 la usa con i numeri.

7.1 Il contributo diretto dell'ingresso

Rispetto allo stato, nell'uscita avanza il termine $D u(t)$, perché il legame diretto fra ingresso e uscita sta nella trasformazione d'uscita (Capitolo 1). L'ingresso arriva quindi all'uscita per due strade:

- **attraverso lo stato**, con i valori da t_0 a $t - 1$ (a tempo discreto), ciascuno pesato con $C H(t - \tau)$;
- **direttamente**, con il solo valore in t , pesato con D .



7.2 Tempo discreto: la matrice W

Definizione – Matrice W a tempo discreto

$$W(k) := \begin{cases} C H(k), & k = 1, 2, \dots, t - t_0, \\ D, & k = 0, \end{cases}$$

$$y(t) = \Psi(t - t_0) x(t_0) + \sum_{\tau=t_0}^t W(t - \tau) u(\tau)$$

con W matrice $q \times p$.

Rispetto alla rappresentazione esplicita la somma **si è allungata di un termine**: prima arrivava a $t - 1$, ora arriva a t . Il termine in più, $\tau = t$, è a distanza zero e vale $W(0) u(t) = D u(t)$: è il legame diretto, che entra così nella somma.

$$\sum_{\tau=t_0}^t W(t - \tau) u(\tau) = \underbrace{\sum_{\tau=t_0}^{t-1} C H(t - \tau) u(\tau)}_{\text{attraverso lo stato}} + \underbrace{D u(t)}_{\tau=t}$$

Una sola funzione della distanza, W , pesa quindi entrambe le strade. La somma arriva a t perché l'uscita dipende dall'ingresso fino a t *incluso*, lo stato solo fino a $t - 1$.

8 L'impulso di Dirac e la matrice W a tempo continuo

Definizione – Impulso di Dirac

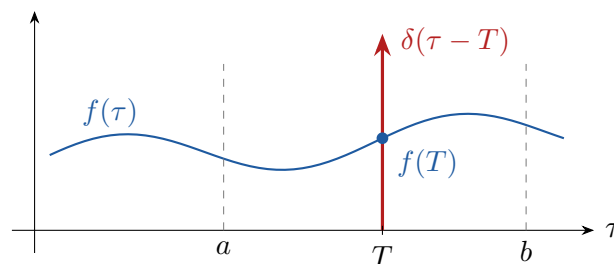
L'**impulso** (di Dirac) $\delta(\cdot)$ **non è una funzione** in senso ordinario. Centrato in T , $\delta(\tau - T)$ è nullo ovunque tranne in $\tau = T$, dove «vale infinito», e ha area 1:

$$\int_a^b \delta(\tau - T) d\tau = \begin{cases} 1 & \text{se } T \in [a, b], \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Proposizione – Proprietà di campionamento

$$f(\tau) \delta(\tau - T) = f(T) \delta(\tau - T), \quad \int_a^b f(\tau) \delta(\tau - T) d\tau = f(T) \quad \text{per } T \in [a, b].$$

Un impulso centrato in un estremo dell'intervallo si considera contenuto nell'intervallo: la proprietà vale anche per $T = a$ e $T = b$.



8.1 Tempo continuo: la matrice W

Definizione – Matrice W a tempo continuo

$$W(t) := C H(t) + D \delta(t),$$

con W matrice $q \times p$.

A tempo discreto aggiungere $D u(t)$ alla somma è immediato. A tempo continuo ogni istante pesa per un $d\tau$ infinitesimo, e l'impulso è l'unico modo formale di prendere, dentro un integrale, il solo valore in t . Si procede così:

1. con la proprietà di campionamento, usando τ come variabile dell'asse dei tempi (t è l'istante in cui si calcola l'uscita):

$$D u(t) = \int_{t_0}^t D \delta(t - \tau) u(\tau) d\tau;$$

2. ora anche il legame diretto è un integrale da t_0 a t di «qualcosa per $u(\tau)$ », e si raccoglie $u(\tau)$:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t C H(t - \tau) u(\tau) d\tau + D u(t) &= \int_{t_0}^t \underbrace{(C H(t - \tau) + D \delta(t - \tau))}_{W(t - \tau)} u(\tau) d\tau \\ &= \int_{t_0}^t W(t - \tau) u(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Proposizione – Rappresentazione esplicita a tempo continuo

$$\begin{aligned} x(t) &= \Phi(t - t_0) x(t_0) + \int_{t_0}^t H(t - \tau) u(\tau) d\tau, \\ y(t) &= \Psi(t - t_0) x(t_0) + \int_{t_0}^t W(t - \tau) u(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

con Φ di $n \times n$, H di $n \times p$, $\Psi = C \Phi$ di $q \times n$ e $W = C H + D \delta$ di $q \times p$.

	tempo discreto	tempo continuo
$x(t)$	$\Phi(t - t_0) x(t_0) + \sum_{\tau=t_0}^{t-1} H(t - \tau) u(\tau)$	$\Phi(t - t_0) x(t_0) + \int_{t_0}^t H(t - \tau) u(\tau) d\tau$
$y(t)$	$\Psi(t - t_0) x(t_0) + \sum_{\tau=t_0}^t W(t - \tau) u(\tau)$	$\Psi(t - t_0) x(t_0) + \int_{t_0}^t W(t - \tau) u(\tau) d\tau$
W	$W(k) = C H(k)$ per $k \geq 1$, $W(0) = D$	$W(t) = C H(t) + D \delta(t)$
legame diretto	termine $\tau = t$: $W(0) u(t) = D u(t)$	$D \delta(t - \tau)$ dentro l'integrale

Osservazione – Il legame diretto si riconosce in W

$C H(t)$ può essere una funzione qualsiasi (esponenziali, seni, ...), mentre $D \delta(t)$ è un impulso e si riconosce senza calcoli. Se in W non c'è l'impulso, $D = 0$ e l'uscita in t dipende dall'ingresso solo prima di t ; altrimenti dipende anche da $u(t)$.

9 Le risposte impulsive

Con e_j si indica il vettore di $\mathbb{R}^p$ che ha 1 al posto j e 0 altrove.

Proposizione – Risposta a un impulso

Dallo stato nullo, con $t_0 = 0$, $x_0 = 0$ e l'impulso sul solo ingresso j , $u(\tau) = e_j \delta(\tau)$:

$$x(t) = H(t) e_j, \quad y(t) = W(t) e_j,$$

cioè lo stato e l'uscita sono le colonne j di H e di W .

Basta la proprietà di campionamento, con l'impulso nell'estremo $\tau = 0$, e allo stesso modo per lo stato:

$$y(t) = \int_0^t W(t - \tau) e_j \delta(\tau) d\tau = W(t) e_j.$$

Definizione – Matrici delle risposte impulsive

W è la **matrice delle risposte impulsive in uscita**, H quella **nello stato**: la loro colonna j è la risposta forzata a un impulso sul solo ingresso j . Con un solo ingresso si parla di **risposta impulsiva** in uscita e nello stato.

Il nome dice come si ottengono: l'uscita forzata è una grandezza che si misura, e con un impulso in ingresso coincide con W . Così W si isola e si misura sul sistema. Esercizio 2 ne chiede definizione e significato.

Con più uscite ($q > 1$) la colonna $W(t) e_j$ ha q componenti: l'integrale si calcola componente per componente, e ogni componente è la risposta di un'uscita.

Con più ingressi ($p > 1$) non basta un solo esperimento:

esperimento	ingresso $u(\tau)$	uscita forzata
impulso sul solo ingresso j	$e_j \delta(\tau)$	$W(t) e_j$, la colonna j
un impulso su ogni ingresso	$(e_1 + \dots + e_p) \delta(\tau)$	somma delle colonne di W

Con tutti gli impulsi insieme le colonne si sommano e non si distinguono più. Servono p esperimenti, uno per ingresso, e ciascuno dà una colonna: così si costruisce tutta W , e allo stesso modo H .

10 I vincoli su Φ e H

Proposizione – Vincoli della rappresentazione con lo stato

Per ogni $t_0 \leq \tau \leq t_1 \leq t$:

1. **istante iniziale:**

$$\Phi(0) = I;$$

2. **proprietà di semigruppato:**

$$\Phi(t - t_0) = \Phi(t - t_1) \Phi(t_1 - t_0);$$

3. **composizione di H :**

$$H(t - \tau) = \Phi(t - t_1) H(t_1 - \tau).$$

Il primo vincolo viene dall'osservare subito il sistema: con $t = t_0$ l'integrale è su un intervallo nullo, e $x(t_0) = \Phi(0) x(t_0)$ per ogni $x(t_0)$. Gli altri due vengono dalla proprietà di separazione.

Dimostrazione

1. **Esperimento spezzato.** Per la proprietà di separazione (Capitolo 1) ci si ferma in t_1 e si riparte da $x(t_1)$:

$$x(t_1) = \Phi(t_1 - t_0) x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} H(t_1 - \tau) u(\tau) d\tau,$$

$$x(t) = \Phi(t - t_1) x(t_1) + \int_{t_1}^t H(t - \tau) u(\tau) d\tau.$$

2. **Sostituzione.** Si mette la prima nella seconda e si porta $\Phi(t - t_1)$, che non dipende da τ , dentro l'integrale:

$$x(t) = \Phi(t - t_1) \Phi(t_1 - t_0) x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t - t_1) H(t_1 - \tau) u(\tau) d\tau$$

$$+ \int_{t_1}^t H(t - \tau) u(\tau) d\tau.$$

3. **Confronto.** Il risultato deve coincidere con l'esperimento intero, $\Phi(t - t_0) x(t_0)$ più l'integrale di $H(t - \tau) u(\tau)$ spezzato in t_1 , per ogni stato iniziale e ogni ingresso. Con $u = 0$ si ottiene la 2. Con $x(t_0) = 0$ gli integrali da t_1 a t sono uguali, e da t_0 a t_1 deve valere $\Phi(t - t_1) H(t_1 - \tau) = H(t - \tau)$: è la 3.

□

Φ e H sono ancora incognite, ma non possono essere funzioni qualsiasi: una scelta che non rispetta questi vincoli non descrive un sistema con lo stato. Per l'uscita non serve un conto a parte, perché segue dallo stato con $y = Cx + Du$.

11 Causalità e memoria

Proposizione – Risposte impulsive di un sistema causale

In un sistema causale la risposta è nulla finché l'impulso non arriva:

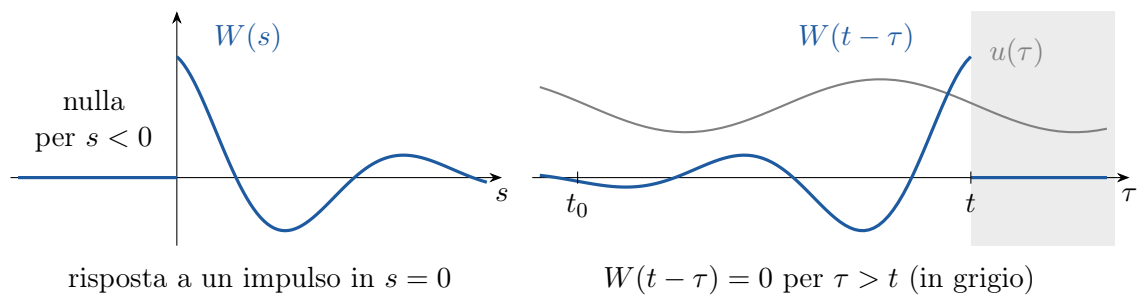
$$H(s) = 0, \quad W(s) = 0 \quad \text{per } s < 0.$$

Perciò prolungare l'integrale oltre t non cambia il risultato: per ogni $t_f > t$

$$\int_{t_0}^{t_f} W(t - \tau) u(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t W(t - \tau) u(\tau) d\tau,$$

e lo stesso vale con H .

Per $\tau > t$ l'argomento $t - \tau$ è negativo, quindi $W(t - \tau) = 0$: gli ingressi futuri sono moltiplicati per zero. La causalità non dipende dagli estremi scelti per l'integrale: sta nelle risposte impulsive. Con più ingressi e più uscite vale per ogni elemento di H e di W .



Nell'integrale l'ingresso di s unità di tempo prima, $u(t - s)$, entra con il peso $W(s)$: la risposta impulsiva dice quanto conta il passato.

Osservazione – Memoria

- Se $W(s) \rightarrow 0$ al crescere di s , gli ingressi lontani pesano quasi nulla: spostare t_0 ancora più indietro non cambia quasi l'uscita.
- Più lunga è la coda di W , più lunga è la **memoria** del sistema.
- Il peso dipende dalla forma di W : dove W è grande, quegli istanti passati contano di più.

Riepilogo

- **Tempo:** continuo $t \in \mathbb{R}$; discreto $t \in \mathbb{Z}$, nessuna evoluzione fra gli istanti; campionato: continuo osservato a $t = kT$.
- **Libera e forzata:** $x = \varphi_L + \varphi_F$, $y = \eta_L + \eta_F = Cx + Du$, con C $q \times n$ e D $q \times p$ costanti.
- **Stato:** $\Phi(t - t_0)x(t_0)$ più $\sum_{\tau=t_0}^{t-1} H(t - \tau)u(\tau)$ o $\int_{t_0}^t H(t - \tau)u(\tau) d\tau$, con Φ di $n \times n$ e H di $n \times p$; se stazionario, $t_0 = 0$.
- **Uscita:** $\Psi(t - t_0)x(t_0) +$ somma fino a t o integrale di $W(t - \tau)u(\tau)$, con $\Psi = C\Phi$.
- **Matrice W :** $W(k) = CH(k)$ per $k \geq 1$, $W(0) = D$; $W(t) = CH(t) + D\delta(t)$, con $\int_a^b f(\tau)\delta(\tau - T) d\tau = f(T)$.
- **Risposte impulsive:** la colonna j di W (di H) è l'uscita (lo stato) forzata dall'impulso sul solo ingresso j ; p esperimenti.
- **Vincoli:** $\Phi(0) = I$, $\Phi(t - t_0) = \Phi(t - t_1)\Phi(t_1 - t_0)$, $H(t - \tau) = \Phi(t - t_1)H(t_1 - \tau)$.
- **Causalità e memoria:** $H(s) = W(s) = 0$ per $s < 0$; $W(s)$ è il peso dell'ingresso di s unità di tempo prima.

12 Esercizi

Esercizio 1 – Il secchio

Nel secchio ci sono tre litri d'acqua; si aggiunge un litro al minuto per cinque minuti. Stato e uscita sono la quantità d'acqua (in litri), l'ingresso è la portata versata (in litri al minuto), e il secchio non ha perdite. Quanta acqua c'è alla fine?

Soluzione a pagina 14 →

Esercizio 2 – Appello del 08/06/2020, Prof.ssa Claudia Califano e Prof. Paolo Di Giamberardino, esercizio 5, adattato

$w(t)$: definizione e significato fisico.

Soluzione a pagina 14 →

13 Soluzioni

Soluzione dell'Esercizio 1 – Il secchio

Senza ingresso la quantità resta quella iniziale, e ogni litro versato resta nel secchio: $\Phi(t) = 1$, $H(t) = 1$, $C = 1$, $D = 0$. Con $t_0 = 0$

$$y(5) = 1 \cdot 3 + \int_0^5 1 \cdot 1 \, d\tau = 3 + 5 = 8 \text{ litri.}$$

[← Torna all'Esercizio 1, pagina 13](#)

Soluzione dell'Esercizio 2 – Appello del 08/06/2020, Prof.ssa Claudia Califano e Prof. Paolo Di Giamberardino, esercizio 5, adattato

Con un ingresso e un'uscita la matrice W è una funzione scalare, $w(t)$.

Definizione. Da $y = Cx + Du$ e dall'evoluzione dello stato,

$$w(t) := C H(t) + D \delta(t), \quad y(t) = \Psi(t - t_0) x(t_0) + \int_{t_0}^t w(t - \tau) u(\tau) \, d\tau :$$

w è la funzione che pesa l'ingresso nell'uscita forzata. Il termine $D \delta(t)$ porta dentro l'integrale il legame diretto $D u(t)$.

Significato fisico.

1. **È una risposta.** Dallo stato nullo, con $t_0 = 0$ e $u(\tau) = \delta(\tau)$, la proprietà di campionamento dà $y(t) = \int_0^t w(t - \tau) \delta(\tau) \, d\tau = w(t)$: w è la *risposta impulsiva*, e si misura con un solo esperimento. Con p ingressi servono p esperimenti, uno per colonna di W .
2. **Descrive tutto il comportamento forzato.** Nota w , l'uscita forzata a qualunque ingresso è l'integrale $\int_{t_0}^t w(t - \tau) u(\tau) \, d\tau$: una sola risposta, quella all'impulso, permette di calcolare tutte le altre.
3. **Dice quanto conta il passato.** $w(s)$ è il peso dell'ingresso di s unità di tempo prima: è nulla per $s < 0$, perché il sistema è causale, e la lunghezza della sua coda misura la memoria del sistema. Un impulso in w indica un legame diretto ($D \neq 0$).

[← Torna all'Esercizio 2, pagina 13](#)