

Appunti di Sistemi Dinamici

Canale 1 · Prof. Paolo Di Giamberardino

Capitolo 3: Rappresentazione differenziale ed esponenziale di matrice

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dalle lezioni in aula e dal materiale del corso

Argomenti: Forma implicita (differenziale) e condizione iniziale
Dalla forma esplicita alla differenziale · Esponenziale di matrice
Dalla forma differenziale alla esplicita · Autovalori, autovettori e forma spettrale
Evoluzione libera e modi naturali

Indice

1	La rappresentazione differenziale	1
2	Dalla forma esplicita alla forma differenziale	2
3	L'esponenziale di matrice	3
4	Dalla forma differenziale alla forma esplicita	4
5	Matrici diagonali, autovalori e autovettori	6
6	La forma spettrale	7
7	L'evoluzione libera e i modi naturali	8
8	Esercizi	11
9	Soluzioni	14

1 La rappresentazione differenziale

Definizione – Rappresentazione implicita o differenziale

La **forma implicita**, o **differenziale**, di un sistema lineare stazionario a tempo continuo è

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t), \quad y(t) = C x(t) + D u(t), \quad x(t_0) = x_0$$

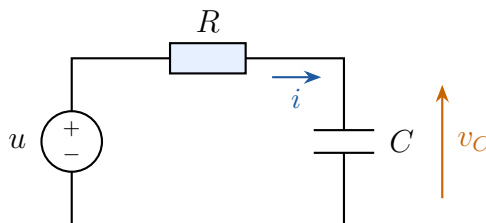
con A di $n \times n$, B di $n \times p$, C di $q \times n$ e D di $q \times p$ costanti. La condizione iniziale fa parte della rappresentazione.

La prima equazione dà la *variazione* dello stato, una combinazione lineare di stato e ingresso; la seconda è la trasformazione d'uscita del Capitolo 2, istantanea.

Da sola l'equazione differenziale ha infinite soluzioni: è la condizione iniziale $x(t_0) = x_0$ a sceglierne una.

Le leggi fisiche si scrivono quasi sempre con delle derivate, mentre la forma esplicita del Capitolo 2 dà direttamente $x(t)$ e $y(t)$: serve un modo per passare dall'una all'altra.

Esempio – Circuito RC



Un generatore di tensione u , un resistore R e un condensatore di capacità C sono in serie: la corrente i è la stessa in tutto il circuito. La legge delle tensioni e la legge del condensatore (Capitolo 1) danno

$$u - R i - v_C = 0, \quad i = C \dot{v}_C \quad \implies \quad RC \dot{v}_C = u - v_C.$$

Con $x = v_C$ è la forma differenziale con $n = 1$: $\dot{x} = -\frac{1}{RC} x + \frac{1}{RC} u$. Qui C è la capacità, non la matrice d'uscita.

Esercizio 1 ne calcola la forma esplicita.

2 Dalla forma esplicita alla forma differenziale

Teorema – Dalla forma esplicita alla differenziale

Sia data la rappresentazione esplicita a tempo continuo del Capitolo 2,

$$x(t) = \Phi(t - t_0) x_0 + \int_{t_0}^t H(t - \tau) u(\tau) d\tau, \quad y(t) = C x(t) + D u(t),$$

con Φ derivabile con derivata continua e H continua. Allora

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t), \quad A := \dot{\Phi}(0), \quad B := H(0)$$

dove $\dot{\Phi}$ è la derivata di Φ rispetto al suo argomento, A è di $n \times n$ e B di $n \times p$.

A e B sono costanti: A è una derivata calcolata in un punto, B il valore di H in un punto. Anche la variazione dello stato, come l'uscita, è una combinazione lineare di stato e ingresso.

Nota – Regola di Leibniz

Per derivare un integrale in cui t compare negli estremi e nella funzione integranda:

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(t, \tau) d\tau = f(t, b(t)) \dot{b}(t) - f(t, a(t)) \dot{a}(t) + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(t, \tau) d\tau.$$

Dimostrazione

1. **Leibniz.** Con $a(t) = t_0$ costante, $b(t) = t$ e $f(t, \tau) = H(t - \tau) u(\tau)$:

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt} [\Phi(t - t_0)] x_0 + H(0) u(t) + \int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial t} [H(t - \tau)] u(\tau) d\tau.$$

2. **Separazione.** Per ogni $\tau < t$ si sceglie t_1 con $\tau \leq t_1 \leq t$. Per i vincoli del Capitolo 2, $\Phi(t - t_0) = \Phi(t - t_1) \Phi(t_1 - t_0)$ e $H(t - \tau) = \Phi(t - t_1) H(t_1 - \tau)$: la dipendenza da t è tutta in $\Phi(t - t_1)$, e

$$\frac{d}{dt} \Phi(t - t_0) = \dot{\Phi}(t - t_1) \Phi(t_1 - t_0), \quad \frac{\partial}{\partial t} H(t - \tau) = \dot{\Phi}(t - t_1) H(t_1 - \tau).$$

3. **Limite** $t_1 \rightarrow t$. I primi membri non dipendono da t_1 . Al limite $\dot{\Phi}(t - t_1) \rightarrow \dot{\Phi}(0) = A$, $\Phi(t_1 - t_0) \rightarrow \Phi(t - t_0)$ e $H(t_1 - \tau) \rightarrow H(t - \tau)$:

$$\frac{d}{dt} \Phi(t - t_0) = A \Phi(t - t_0), \quad \frac{\partial}{\partial t} H(t - \tau) = A H(t - \tau).$$

4. **Raccolta.** Si sostituisce nel punto 1 e si raccoglie A a sinistra:

$$\dot{x}(t) = A \left(\Phi(t - t_0) x_0 + \int_{t_0}^t H(t - \tau) u(\tau) d\tau \right) + H(0) u(t) = A x(t) + B u(t).$$

5. **Uscita.** $y = Cx + Du$ è già istantanea e resta com'è.

□

Esercizio 4 chiede questa dimostrazione.

Osservazione – Serve la regolarità

La forma esplicita non chiede nulla alla derivata di Φ ; la differenziale la usa. Se Φ non è derivabile il limite del punto 3 non esiste e la forma differenziale non c'è: i sistemi con una forma differenziale sono una parte di quelli con una forma esplicita.

3 L'esponenziale di matrice

Definizione – Esponenziale di matrice

Per una matrice A di $n \times n$ e $t \in \mathbb{R}$

$$e^{At} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} = I + At + \frac{A^2 t^2}{2} + \frac{A^3 t^3}{6} + \dots,$$

con $A^0 = I$: è la serie dell'esponenziale con la matrice al posto del numero.

Nota – Errore tipico

e^{At} non è la matrice che ha per elementi gli esponenziali $e^{a_{ij}t}$: le potenze A^k mescolano gli elementi. Per esempio con $A = 0$ la serie si ferma al primo termine e dà I , non la matrice con tutti gli elementi uguali a 1.

Proposizione – Derivata dell'esponenziale

$$\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At} = e^{At} A, \quad e^{A \cdot 0} = I.$$

Dimostrazione

1. **Termine a termine.** Il termine $k = 0$ è costante e sparisce; gli altri danno $\frac{A^k k t^{k-1}}{k!} = \frac{A^k t^{k-1}}{(k-1)!}$.
2. **A a sinistra.** Si scrive $A^k = A A^{k-1}$ e si pone $h = k - 1$:

$$\frac{d}{dt} e^{At} = A \sum_{h=0}^{\infty} \frac{A^h t^h}{h!} = A e^{At}.$$

3. **A a destra.** Con $A^k = A^{k-1} A$ la A esce a destra e si ottiene $e^{At} A$: i due ordini coincidono perché e^{At} è fatta di potenze di A , che commutano con A .

In $t = 0$ resta solo il termine $k = 0$, cioè I . □

4 Dalla forma differenziale alla forma esplicita

Teorema – Soluzione della forma differenziale

La soluzione di $\dot{x} = A x + B u$ con $x(t_0) = x_0$ è

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

Con $n = 1$, cioè $A = a$ e $B = b$ numeri, è la formula dell'analisi, che si ottiene con la **variazione delle costanti**:

1. **Senza ingresso.** Le soluzioni di $\dot{x} = a x$ sono $x(t) = e^{at} k$, con k costante qualsiasi.
2. **La costante diventa una funzione.** Con $x(t) = e^{at} k(t)$ l'equazione $\dot{x} = a x + b u$ diventa $e^{at} \dot{k}(t) = b u(t)$, quindi $k(t) = k(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-a\tau} b u(\tau) d\tau$.

3. **Condizione iniziale.** $x(t_0) = x_0$ dà $k(t_0) = e^{-at_0}x_0$, e moltiplicando per e^{at} si ottiene la formula del teorema.

Ogni ingresso $u(\tau)$ agisce come uno stato iniziale $b u(\tau) d\tau$ dato in τ , che poi evolve con $e^{a(t-\tau)}$; l'integrale somma questi contributi.

Con le matrici si prova la stessa formula, con e^{At} al posto di e^{at} e B a destra dell'esponenziale, e si verifica che funziona: tutto il conto usa solo $\frac{d}{dt}e^{At} = A e^{At}$ ed $e^{A \cdot 0} = I$ (Esercizio 2).

Proposizione – Matrici della forma esplicita

La forma differenziale con matrici A, B, C, D ha la rappresentazione esplicita del Capitolo 2 con

$$\Phi(t) = e^{At}, \quad H(t) = e^{At}B, \quad \Psi(t) = C e^{At}, \quad W(t) = C e^{At}B + D \delta(t).$$

Lo stato del teorema e quello della forma esplicita devono coincidere per ogni x_0 e ogni ingresso: i coefficienti di x_0 e di $u(\tau)$ sono uguali, cioè $\Phi(t - t_0) = e^{A(t-t_0)}$ e $H(t - \tau) = e^{A(t-\tau)}B$. $\Psi = C \Phi$ e $W = C H + D \delta$ sono le definizioni del Capitolo 2. Esercizio 5 le usa con $n = 1$.

I due passaggi sono uno l'inverso dell'altro: da $\Phi = e^{At}$ si ritrova $\dot{\Phi}(0) = A e^{A \cdot 0} = A$, da $H = e^{At}B$ si ritrova $H(0) = B$, e da $\Psi = C e^{At}$ si ritrova $\Psi(0) = C$. Quando Φ è regolare, le due rappresentazioni sono equivalenti.

	dalla esplicita alla differenziale	dalla differenziale alla esplicita
stato	$A = \dot{\Phi}(0), \quad B = H(0)$	$\Phi(t) = e^{At}, \quad H(t) = e^{At}B$
uscita	$C = \Psi(0), \quad D$ di $y = Cx + Du$	$\Psi(t) = C e^{At}, \quad W(t) = C e^{At}B + D \delta(t)$
serve	Φ derivabile	la condizione iniziale $x(t_0) = x_0$

Nota – Errore tipico

Nel passaggio dalla forma esplicita alla differenziale A e B non sono noti: nascono lì, come $A := \dot{\Phi}(0)$ e $B := H(0)$. Per dimostrarlo non si può usare $\Phi(t) = e^{At}$, che viene dal passaggio inverso.

5 Matrici diagonali, autovalori e autovettori

Proposizione – Esponenziale di una matrice diagonale

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{pmatrix} \implies e^{At} = \begin{pmatrix} e^{a_{11}t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{a_{nn}t} \end{pmatrix},$$

con tutti zeri fuori dalla diagonale.

Le potenze di una matrice diagonale sono diagonali, con le potenze degli elementi: A^k ha sulla diagonale $a_{11}^k, \dots, a_{nn}^k$. La serie si somma elemento per elemento, e sulla diagonale restano le serie degli esponenziali $e^{a_{ii}t}$.

Per una A qualsiasi la serie non si somma a mano. Una A diagonale, però, vuol dire n equazioni, ciascuna in una sola variabile di stato: nei modelli non capita quasi mai. Si cerca allora una matrice diagonale legata ad A , con gli autovettori.

Definizione – Autovalori e autovettori

Il numero λ è un **autovalore** di A , e il vettore $u \neq 0$ un suo **autovettore**, se

$$Au = \lambda u :$$

A manda la retta di u in sé stessa.

Proposizione – Equazione caratteristica

Gli autovalori di A sono le soluzioni di

$$\det(A - \lambda I) = 0,$$

un'equazione di grado n in λ (il **polinomio caratteristico** uguagliato a zero). Gli autovettori di λ sono le soluzioni non nulle di $(A - \lambda I)u = 0$.

$(A - \lambda I)u = 0$ è un sistema lineare omogeneo, e ha soluzioni non nulle solo se $A - \lambda I$ è singolare. Le n soluzioni dell'equazione possono essere complesse o coincidere; qui gli autovalori sono reali, e il caso più semplice è quello di n autovalori distinti.

6 La forma spettrale

Si mettono gli autovettori $u_1, \dots, u_n$ come colonne di una matrice U e gli autovalori sulla diagonale di Λ ; $v_1, \dots, v_n$ sono le righe di U^{-1} :

$$U := \begin{pmatrix} u_1 & \cdots & u_n \end{pmatrix}, \quad \Lambda := \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad U^{-1} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Il libro scrive T^{-1} al posto di U , e quindi $TAT^{-1} = \Lambda$.

Teorema – Forma spettrale

Se A ha n autovettori $u_1, \dots, u_n$ linearmente indipendenti:

1. A si scrive

$$A = U \Lambda U^{-1} = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i v_i$$

2. le righe di U^{-1} e gli autovettori soddisfano

$$v_i u_j = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Con n autovalori reali e distinti gli autovettori sono sempre indipendenti.

Dimostrazione

1. Le colonne di AU sono $Au_i = \lambda_i u_i$, quelle di $U\Lambda$ sono $\lambda_i u_i$: $AU = U\Lambda$. Gli autovettori sono indipendenti, quindi U è invertibile e $A = U\Lambda U^{-1}$.
2. Il prodotto $U(\Lambda U^{-1})$ è la somma delle colonne di U per le righe di ΛU^{-1} , cioè $\lambda_i v_i$: $A = \sum_i \lambda_i u_i v_i$.
3. $U^{-1}U = I$ dice elemento per elemento $v_i u_j = 1$ se $i = j$ e 0 altrimenti.

□

Moltiplicando $A = U\Lambda U^{-1}$ a sinistra per U^{-1} si ha $U^{-1}A = \Lambda U^{-1}$, cioè $v_i A = \lambda_i v_i$: le v_i sono gli **autovettori sinistri**, le righe che risolvono $v(A - \lambda_i I) = 0$. Non sono autovettori sinistri qualsiasi: sono quelli normalizzati con $v_i u_i = 1$. Ogni $u_i v_i$ è una matrice $n \times n$ (colonna per riga), mentre $v_i u_j$ è un numero.

Con un autovalore ripetuto non è detto che ci siano abbastanza autovettori indipendenti: la forma spettrale chiede di trovarne n .

Proposizione – Esponenziale nella forma spettrale

Se A ha n autovettori indipendenti,

$$A^k = U \Lambda^k U^{-1} = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k u_i v_i,$$

$$e^{At} = U e^{\Lambda t} U^{-1} = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} u_i v_i$$

con $e^{\Lambda t}$ la matrice diagonale degli $e^{\lambda_i t}$.

Dimostrazione

1. **Potenze.** In $A^2 = U \Lambda U^{-1} U \Lambda U^{-1}$ il prodotto $U^{-1}U$ in mezzo vale I : $A^2 = U \Lambda^2 U^{-1}$, e così per ogni k .
2. **Con le somme.** $A^2 = \sum_i \sum_j \lambda_i \lambda_j u_i (v_i u_j) v_j$: i termini con $i \neq j$ sono nulli e resta $\sum_i \lambda_i^2 u_i v_i$; allo stesso modo per ogni k .
3. **Serie.** Si mette A^k nella serie e si portano fuori U e U^{-1} : dentro resta la serie di Λ , che è diagonale, quindi $e^{\Lambda t}$. Nella forma con le somme, per ogni i la serie di $\lambda_i^k t^k / k!$ dà $e^{\lambda_i t}$.

□

Per calcolare e^{At} quindi:

1. si trovano gli autovalori con $\det(A - \lambda I) = 0$;
2. per ciascuno si trova un autovettore, risolvendo $(A - \lambda_i I) u = 0$;
3. si costruiscono U e U^{-1} , le cui righe sono le v_i ;
4. si scrive $e^{At} = \sum_i e^{\lambda_i t} u_i v_i$.

Gli esercizi 3 (in $\mathbb{R}^2$) e 6 (in $\mathbb{R}^3$, con un autovalore ripetuto) seguono questi passi.

7 L'evoluzione libera e i modi naturali

Proposizione – Evoluzione libera

Se A ha n autovettori indipendenti, l'evoluzione libera da x_0 è

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x_0 = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i(t-t_0)} u_i, \quad c_i := v_i x_0$$

e in $t = t_0$ si ha $x_0 = \sum_i c_i u_i$.

Basta la forma spettrale: $e^{A(t-t_0)}x_0 = \sum_i e^{\lambda_i(t-t_0)} u_i (v_i x_0)$, e $c_i = v_i x_0$ è un numero, che si porta davanti. I c_i sono le componenti di x_0 rispetto agli autovettori.

Definizione – Modo naturale

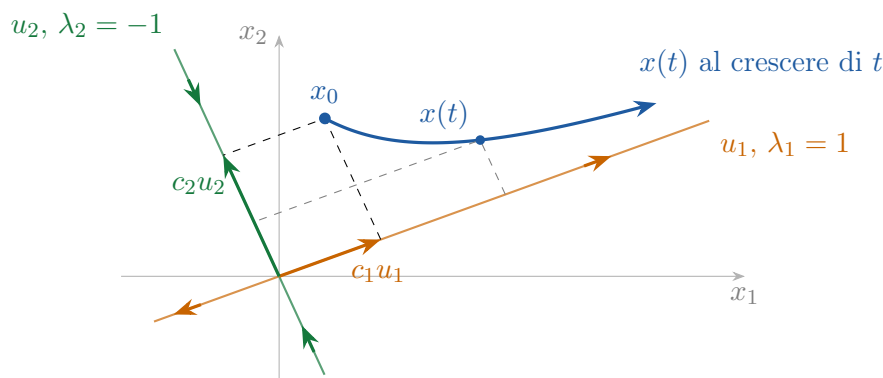
Ciascun termine $c_i e^{\lambda_i(t-t_0)} u_i$ dell'evoluzione libera è un **modo naturale**: lo stato evolve da solo, senza ingresso, lungo l'autovettore u_i , con la legge temporale $e^{\lambda_i t}$.

Con autovalori reali e distinti l'evoluzione libera contiene solo esponenziali: ogni componente di $x(t)$ è una combinazione di $e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}$.

Lungo ciascun autovettore u_i l'ampiezza $c_i e^{\lambda_i(t-t_0)}$ segue un esponenziale puro:

- cresce se $\lambda_i > 0$;
- si riduce verso zero se $\lambda_i < 0$;
- resta c_i se $\lambda_i = 0$.

Lo stato è la somma vettoriale di questi movimenti, e ogni modo si studia da solo, senza guardare gli altri.



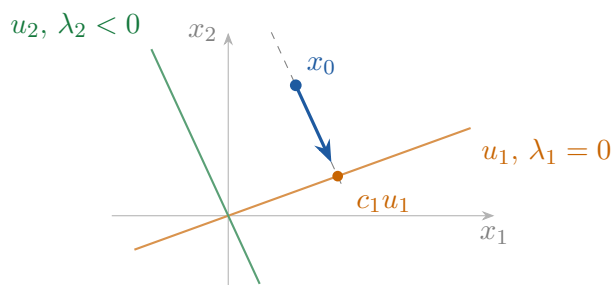
Nella figura $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$. La componente lungo u_1 cresce come e^{t-t_0} , quella lungo u_2 si riduce come $e^{-(t-t_0)}$: lo stato si allontana dall'origine e si avvicina alla retta di u_1 .

Osservazione – Le componenti si leggono con le parallele

c_1 e c_2 si trovano sul disegno tracciando da x_0 le parallele agli autovettori, non le perpendicolari: è la regola del parallelogramma letta al contrario. Ricomponendo le due componenti a ogni istante si ottiene lo stato.

Nel piano il segno dei due autovalori dice come si muove lo stato, anche senza calcolare la traiettoria:

λ_1	λ_2	moto dello stato da x_0
> 0	> 0	si allontana dall'origine
> 0	< 0	si avvicina alla retta di u_1 e si allontana lungo di essa (prima figura)
< 0	< 0	va verso l'origine
$= 0$	$\neq 0$	resta sulla retta per x_0 parallela a u_2 : va verso $c_1 u_1$ se $\lambda_2 < 0$, se ne allontana se $\lambda_2 > 0$



Con $\lambda_1 = 0$ la componente lungo u_1 resta c_1 per sempre, mentre quella lungo u_2 va a zero: lo stato scorre sulla retta tratteggiata e si ferma in $c_1 u_1$.

Proposizione – Partire sugli autovettori

Se x_0 sta sulla retta di u_i , cioè $c_j = 0$ per $j \neq i$, l'evoluzione libera resta su quella retta:

$$x(t) = c_i e^{\lambda_i(t-t_0)} u_i.$$

Più in generale, il sottospazio generato da alcuni autovettori è **invariante**: partendo lì si resta lì.

Le componenti con $c_j = 0$ restano nulle per sempre. Per esempio in $\mathbb{R}^3$, con $c_3 = 0$ lo stato resta nel piano di u_1 e u_2 . Nella prima figura della sezione, partendo sulla retta di u_2 lo stato va verso l'origine; partendo sulla retta di u_1 se ne allontana lungo la retta. Gli esercizi 3 e 7 cercano gli stati iniziali da cui l'evoluzione libera non si allontana.

Riepilogo

- **Forma differenziale:** $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx + Du$, con la condizione iniziale $x(t_0) = x_0$.
- **Da esplicita a differenziale:** $A = \dot{\Phi}(0)$, $B = H(0)$, $C = \Psi(0)$; serve Φ derivabile.
- **Esponenziale di matrice:** $e^{At} = \sum_k A^k t^k / k!$, non elemento per elemento; $\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At} = e^{At} A$.
- **Soluzione:** $x(t) = e^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$.
- **Da differenziale a esplicita:** $\Phi = e^{At}$, $H = e^{At} B$, $\Psi = C e^{At}$, $W = C e^{At} B + D\delta$.
- **Autovalori:** $\det(A - \lambda I) = 0$, $Au = \lambda u$; se A è diagonale, e^{At} ha sulla diagonale gli $e^{a_{ii}t}$.
- **Forma spettrale:** con n autovettori indipendenti $A = U \Lambda U^{-1} = \sum_i \lambda_i u_i v_i$ ed $e^{At} = \sum_i e^{\lambda_i t} u_i v_i$.
- **Modi naturali:** $x(t) = \sum_i c_i e^{\lambda_i(t-t_0)} u_i$ con $c_i = v_i x_0$; lungo u_i cresce se $\lambda_i > 0$, si riduce se $\lambda_i < 0$, resta se $\lambda_i = 0$.

8 Esercizi

Esercizio 1 – Il circuito RC

Nel circuito dell'esempio della Sezione 1 l'ingresso è la tensione u del generatore e l'uscita la tensione v_C del condensatore.

1. Scegli lo stato e scrivi la forma differenziale.
2. Calcola Φ , H , Ψ e W .
3. Con quale peso la tensione applicata s secondi prima entra nell'uscita?

Soluzione a pagina 14 →

Esercizio 2 – Verifica della soluzione

Verifica, derivando, che

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

soddisfa $\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t)$ e $x(t_0) = x_0$.

Soluzione a pagina 14 →

Esercizio 3 – Evoluzione libera lungo gli autovettori

Sia

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Calcola autovalori e autovettori di A , poi U e U^{-1} .
2. Calcola e^{At} con la forma spettrale.
3. Calcola l'evoluzione libera di $\dot{x} = Ax$ con $t_0 = 0$ da

$$x_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix},$$

e descrivi che cosa succede lungo gli autovettori.

4. Da quali stati iniziali l'evoluzione libera tende all'origine?

Soluzione a pagina 14 →

Esercizio 4 – Appello del 08/06/2020, Prof.ssa Claudia Califano e Prof. Paolo Di Giamberardino, esercizio 4

Dimostrare (con tutti i passaggi) come si passa dal modello esplicito al modello implicito di un sistema a tempo continuo.

Soluzione a pagina 15 →

Esercizio 5 – Appello del 25/03/2019, Prof. Paolo Di Giamberardino, esercizio 2, adattato

Per $\kappa \in \mathbb{R}$, si consideri il sistema

$$\dot{x} = -x + \kappa u, \quad y = x.$$

Calcolare la risposta forzata rispetto a $u(t) = \delta_{-1}(t)$, il gradino unitario ($\delta_{-1}(t) = 1$ per $t \geq 0$ e 0 per $t < 0$).

Soluzione a pagina 16 →

Esercizio 6 – Appello del 11/02/2022, Prof.ssa Claudia Califano e Prof. Paolo Di Giamberardino, esercizio 1, adattato

Sia dato il sistema rappresentato da

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -4 \\ 2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 2 - \alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t), \quad y(t) = \begin{pmatrix} -\alpha & 2\alpha & 1 \end{pmatrix} x(t) + \alpha u(t)$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$. Posto $\alpha = 1$:

1. determinare $H(t)$, $\Psi(t)$ e $W(t)$;
2. determinare la risposta forzata all'ingresso $u(t) = (t - 1)\delta_{-1}(t) - t\delta_{-1}(t - 1)$, dopo averlo graficato.

Con δ_{-1} si indica il gradino unitario: $\delta_{-1}(t) = 1$ per $t \geq 0$ e 0 per $t < 0$.

Soluzione a pagina 16 →

Esercizio 7 – Appello del 24/07/2026, Canale 1, Prof. Paolo Di Giamberardino, esercizio 2, adattato

Dato il sistema

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0.5 & -1.5 \\ -1.5 & 0.5 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u, \quad y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x :$$

1. determinarne i modi naturali;
2. determinare gli stati iniziali, se esistono, tali che l'evoluzione libera non diverga;
3. disegnare qualitativamente l'evoluzione libera a partire da $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;
4. calcolare le risposte impulsive nello stato ed in uscita;
5. calcolare la risposta forzata all'ingresso $u(t) = \cos(2t - 1)$.

Soluzione a pagina 18 →

9 Soluzioni

Soluzione dell'Esercizio 1 – Il circuito RC

1. Lo stato è $x = v_C$: la sua variazione compare nel modello, e il suo valore iniziale riassume la carica accumulata prima. Da $RC \dot{v}_C = u - v_C$:

$$\dot{x} = -\frac{1}{RC}x + \frac{1}{RC}u, \quad y = x,$$

cioè $A = -\frac{1}{RC}$, $B = \frac{1}{RC}$, matrice d'uscita 1 e $D = 0$.

2. Con $n = 1$ la serie dell'esponenziale è quella di un numero: $e^{At} = e^{-t/(RC)}$. Quindi

$$\Phi(t) = \Psi(t) = e^{-t/(RC)}, \quad H(t) = W(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/(RC)},$$

senza impulso in W perché $D = 0$.

3. Il peso è $W(s) = \frac{1}{RC} e^{-s/(RC)}$ per $s \geq 0$ (nullo per $s < 0$): decresce in modo esponenziale, e per $s = 3RC$ vale già circa il 5% del valore in $s = 0$ ($e^{-3} \approx 0,05$). La memoria del circuito dura qualche volta RC .

[← Torna all'Esercizio 1, pagina 11](#)

Soluzione dell'Esercizio 2 – Verifica della soluzione

1. **Condizione iniziale.** In $t = t_0$ l'integrale è nullo ed $e^{A \cdot 0} = I$: $x(t_0) = x_0$.
2. **Primo termine.** Per la derivata dell'esponenziale, con $t - t_0$ al posto di t (la sua derivata è 1): $\frac{d}{dt} e^{A(t-t_0)} x_0 = A e^{A(t-t_0)} x_0$.
3. **Integrale.** Con la regola di Leibniz, $a(t) = t_0$, $b(t) = t$ e $f(t, \tau) = e^{A(t-\tau)} B u(\tau)$: il termine all'estremo superiore è $f(t, t) = e^{A \cdot 0} B u(t) = B u(t)$, e $\frac{\partial f}{\partial t} = A e^{A(t-\tau)} B u(\tau)$.
4. **Somma.** Si raccoglie A a sinistra:

$$\dot{x}(t) = A \left(e^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau \right) + B u(t) = A x(t) + B u(t).$$

[← Torna all'Esercizio 2, pagina 11](#)

Soluzione dell'Esercizio 3 – Evoluzione libera lungo gli autovettori

1. $\det(A - \lambda I) = (3 - \lambda)(-3 - \lambda) + 8 = \lambda^2 - 1$, quindi $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$. Per un vettore di componenti a e b , $(A - I)u = 0$ si riduce a $2a - 4b = 0$ e $(A + I)u = 0$

a $4a - 4b = 0$:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Il determinante di U è 1; le righe di U^{-1} sono $v_1 = (1 \ -1)$ e $v_2 = (-1 \ 2)$, e infatti $v_1 u_1 = v_2 u_2 = 1$, $v_1 u_2 = v_2 u_1 = 0$.

2. Con $u_1 v_1$ e $u_2 v_2$, colonna per riga:

$$e^{At} = e^t \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + e^{-t} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^t - e^{-t} & -2e^t + 2e^{-t} \\ e^t - e^{-t} & -e^t + 2e^{-t} \end{pmatrix}.$$

In $t = 0$ dà I , come deve.

3. $c_1 = v_1 x_0 = 3 - 2 = 1$ e $c_2 = v_2 x_0 = -3 + 4 = 1$:

$$x(t) = e^t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La componente lungo u_1 cresce come e^t , quella lungo u_2 si riduce come e^{-t} : per t grande $x(t) \approx e^t u_1$, e lo stato si allontana lungo la retta di u_1 , come nella figura della Sezione 7.

4. Il termine $c_1 e^t u_1$ cresce se $c_1 \neq 0$, quindi serve $c_1 = v_1 x_0 = x_{0,1} - x_{0,2} = 0$: gli stati iniziali sulla retta di u_2 , $x_0 = c_2 u_2$. Da lì $x(t) = c_2 e^{-t} u_2$ va verso l'origine lungo la retta.

[← Torna all'Esercizio 3, pagina 12](#)

Soluzione dell'Esercizio 4 – Appello del 08/06/2020, Prof.ssa Claudia Califano e Prof. Paolo Di Giamberardino, esercizio 4

Si parte dal modello esplicito di un sistema lineare stazionario,

$$x(t) = \Phi(t - t_0) x_0 + \int_{t_0}^t H(t - \tau) u(\tau) d\tau, \quad y(t) = C x(t) + D u(t),$$

con Φ derivabile con derivata continua e H continua.

1. **Vincoli.** Per la proprietà di separazione, per $t_0 \leq \tau \leq t_1 \leq t$ valgono

$$\Phi(t - t_0) = \Phi(t - t_1) \Phi(t_1 - t_0), \quad H(t - \tau) = \Phi(t - t_1) H(t_1 - \tau);$$

inoltre $\Phi(0) = I$.

2. **Derivata.** Con la regola di Leibniz

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt} [\Phi(t - t_0)] x_0 + H(0) u(t) + \int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial t} [H(t - \tau)] u(\tau) d\tau.$$

3. **Derivate delle matrici.** Con i vincoli la dipendenza da t è tutta in $\Phi(t - t_1)$: $\frac{d}{dt}\Phi(t - t_0) = \dot{\Phi}(t - t_1)\Phi(t_1 - t_0)$ e $\frac{\partial}{\partial t}H(t - \tau) = \dot{\Phi}(t - t_1)H(t_1 - \tau)$. Per $t_1 \rightarrow t$ diventano $A\Phi(t - t_0)$ e $AH(t - \tau)$, con $A := \dot{\Phi}(0)$.

4. **Equazione dello stato.** Sostituendo e raccogliendo A , con $B := H(0)$:

$$\dot{x}(t) = A\left(\Phi(t - t_0)x_0 + \int_{t_0}^t H(t - \tau)u(\tau) d\tau\right) + Bu(t) = Ax(t) + Bu(t).$$

5. **Modello implicito.** L'uscita è già istantanea e resta com'è; la condizione iniziale si legge dal modello esplicito in $t = t_0$, dove $\Phi(0) = I$ dà $x(t_0) = x_0$:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad x(t_0) = x_0.$$

A e B nascono nel passaggio: non si usa $\Phi = e^{At}$, che viene dal passaggio inverso.

[← Torna all'Esercizio 4, pagina 12](#)

Soluzione dell'Esercizio 5 – Appello del 25/03/2019, Prof. Paolo Di Giamberardino, esercizio 2, adattato

È la forma differenziale con $n = 1$, $A = -1$, $B = \kappa$, matrice d'uscita 1 e $D = 0$. Quindi $W(t) = e^{-t}\kappa = \kappa e^{-t}$, senza impulso. Con $t_0 = 0$, per $t \geq 0$:

$$y(t) = \int_0^t \kappa e^{-(t-\tau)} \cdot 1 d\tau = \kappa e^{-t} [e^\tau]_0^t = \kappa (1 - e^{-t}),$$

e $y(t) = 0$ per $t < 0$. L'uscita parte da 0 e sale verso κ .

[← Torna all'Esercizio 5, pagina 12](#)

Soluzione dell'Esercizio 6 – Appello del 11/02/2022, Prof.ssa Claudia Califano e Prof. Paolo Di Giamberardino, esercizio 1, adattato

Con $\alpha = 1$:

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = 1.$$

1. **Autovalori.** Sviluppando il determinante sull'ultima riga, $\det(A - \lambda I) = (-1 - \lambda)[(3 - \lambda)(-3 - \lambda) + 8] = -(1 + \lambda)(\lambda^2 - 1)$: $\lambda = 1$ e $\lambda = -1$ doppio.

Autovettori. Per un vettore di componenti a, b, c : con $\lambda = 1$, $(A - I)u = 0$ dà $c = 0$ e $a = 2b$; con $\lambda = -1$, $A + I$ ha le prime due righe proporzionali e la terza nulla, e resta la sola equazione $a - b - c = 0$, con due soluzioni

indipendenti. Quindi

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

con $\det U = 1$: $v_1 = (1 \ -1 \ -1)$, $v_2 = (-1 \ 2 \ 1)$, $v_3 = (0 \ 0 \ 1)$. I tre autovettori sono indipendenti e vale la forma spettrale.

Esponenziale. $e^{At} = e^t u_1 v_1 + e^{-t} (u_2 v_2 + u_3 v_3)$, con

$$u_1 v_1 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 v_2 + u_3 v_3 = I - u_1 v_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

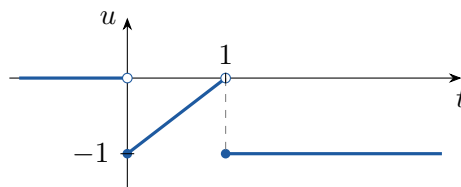
perché la somma di tutti gli $u_i v_i$ è $UU^{-1} = I$.

Matrici della forma esplicita. Servono i prodotti con B e C : $v_1 B = 0$, $v_2 B = 1$, $v_3 B = 0$ e $C u_1 = 0$, $C u_2 = 1$, $C u_3 = 0$. Il termine in e^t sparisce da tutte e tre:

$$H(t) = e^{At} B = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi(t) = C e^{At} = e^{-t} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$W(t) = C H(t) + D \delta(t) = e^{-t} + \delta(t).$$

2. **Ingresso.** $u(t) = 0$ per $t < 0$, $u(t) = t-1$ per $0 \leq t < 1$ e $u(t) = (t-1)-t = -1$ per $t \geq 1$:



Risposta forzata. Con $x_0 = 0$ e $t_0 = 0$, per la proprietà di campionamento

$$y(t) = \int_0^t W(t-\tau) u(\tau) d\tau = \int_0^t e^{-(t-\tau)} u(\tau) d\tau + u(t).$$

Per $0 \leq t < 1$: $\int_0^t e^{-(t-\tau)} (\tau-1) d\tau = e^{-t} [e^\tau (\tau-2)]_0^t = t-2+2e^{-t}$, quindi

$$y(t) = 2t-3+2e^{-t}.$$

Per $t \geq 1$ l'integrale si spezza in 1: $e^{-t} [e^\tau (\tau-2)]_0^1 - \int_1^t e^{-(t-\tau)} d\tau = (2-e)e^{-t} - (1-e^{1-t}) = 2e^{-t}-1$, quindi

$$y(t) = 2e^{-t}-2.$$

L'integrale è continuo in $t = 1$; y salta di -1 , come u , per il legame diretto $D = 1$.

[← Torna all'Esercizio 6, pagina 13](#)

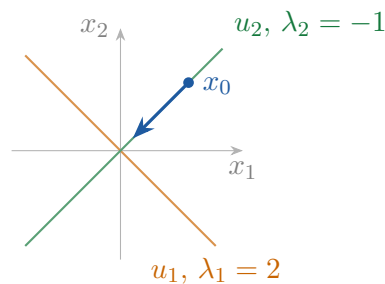
Soluzione dell'Esercizio 7 – Appello del 24/07/2026, Canale 1, Prof. Paolo Di Giamberardino, esercizio 2, adattato

1. **Modi naturali.** $\det(A - \lambda I) = (0.5 - \lambda)^2 - 2.25 = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1)$: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$. Per un vettore di componenti a e b , $(A - 2I)u = 0$ dà $a + b = 0$ e $(A + I)u = 0$ dà $a - b = 0$:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad U^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

con $v_1 = \frac{1}{2}(1 \ -1)$ e $v_2 = \frac{1}{2}(1 \ 1)$. I modi naturali sono $c_1 e^{2(t-t_0)}u_1$, che cresce, e $c_2 e^{-(t-t_0)}u_2$, che va a zero, con $c_i = v_i x_0$.

2. **Stati che non divergono.** Serve $c_1 = v_1 x_0 = \frac{1}{2}(x_{0,1} - x_{0,2}) = 0$: gli stati sulla retta di u_2 , $x_0 = \alpha u_2$ con $\alpha \in \mathbb{R}$. Da lì $x(t) = \alpha e^{-(t-t_0)}u_2$ va verso l'origine; da ogni altro stato la componente lungo u_1 cresce come $e^{2(t-t_0)}$.
3. **Disegno.** $x_0 = u_2$, quindi $c_1 = 0$, $c_2 = 1$ e $x(t) = e^{-(t-t_0)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$: lo stato scorre sulla retta di u_2 verso l'origine, senza raggiungerla in tempo finito.



4. **Risposte impulsive.** $v_1 B = 0$ e $v_2 B = 1$, quindi

$$H(t) = e^{At}B = e^{2t}u_1(v_1 B) + e^{-t}u_2(v_2 B) = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$W(t) = C H(t) = e^{-t},$$

senza impulso perché $D = 0$. La legge e^{2t} non compare: un impulso in ingresso porta lo stato sulla retta di u_2 .

5. **Risposta forzata.** Dallo stato nullo in $t_0 = 0$, istante da cui si applica l'ingresso, per $t \geq 0$

$$y(t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)} \cos(2\tau - 1) d\tau = e^{-t} \left[\frac{1}{5} e^{\tau} (\cos(2\tau - 1) + 2 \sin(2\tau - 1)) \right]_0^t,$$

quindi

$$y(t) = \frac{1}{5} (\cos(2t - 1) + 2 \sin(2t - 1)) - \frac{1}{5} (\cos 1 - 2 \sin 1) e^{-t},$$

nulla in $t = 0$.

[← Torna all'Esercizio 7, pagina 13](#)