

Appunti di Sistemi Dinamici

Canale 1 · Prof. Paolo Di Giamberardino

Capitolo 4: Modi naturali: osservabilità, eccitabilità e cambio di coordinate

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dalle lezioni in aula e dal materiale del corso

Argomenti: Modi naturali in uscita e osservabilità · Modi naturali nella risposta
impulsiva ed eccitabilità
Più ingressi e più uscite · Modi nella risposta impulsiva in uscita
Cambio di coordinate · La base degli autovettori

Indice

1	I modi naturali nell'evoluzione libera in uscita	1
2	I modi naturali nella risposta impulsiva dello stato	1
3	Struttura del sistema e stato iniziale	2
4	Più ingressi e più uscite	2
5	I modi nella risposta impulsiva in uscita	3
6	Il cambio di coordinate	4
7	La base degli autovettori	6
8	Esercizi	7
9	Soluzioni	9

In tutto il capitolo A ha n autovalori reali e distinti $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, con autovettori u_i , $U = (u_1 \cdots u_n)$ e v_i le righe di U^{-1} , come nel Capitolo 3. Il sistema ha p ingressi e q uscite.

1 I modi naturali nell'evoluzione libera in uscita

Proposizione – Evoluzione libera in uscita

Con $c_i := v_i x_0$,

$$y(t) = \Psi(t - t_0) x_0 = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i(t-t_0)} C u_i, \quad \Psi(t) = C e^{At} = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} (C u_i) v_i$$

Basta portare C dentro la somma dell'evoluzione libera dello stato, $x(t) = \sum_i c_i e^{\lambda_i(t-t_0)} u_i$: c_i ed $e^{\lambda_i(t-t_0)}$ sono numeri, e resta il vettore $C u_i$ di q componenti. L'evoluzione libera in uscita è quindi una combinazione dei modi naturali.

Definizione – Modo non osservabile

Il modo naturale i -esimo è **non osservabile** se

$$C u_i = 0,$$

e **osservabile** altrimenti. Con più uscite $C u_i$ è un vettore, e il modo è non osservabile se è nullo tutto il vettore.

Un modo non osservabile manca da $y(t)$ per ogni stato iniziale: la sua legge $e^{\lambda_i t}$ non si vede nell'uscita. Il modo c'è nello stato, ma l'uscita non lo mostra.

2 I modi naturali nella risposta impulsiva dello stato

Proposizione – Risposta impulsiva nello stato

$$H(t) = e^{At} B = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} u_i (v_i B)$$

È la forma spettrale di e^{At} moltiplicata a destra per B . Con un solo ingresso B è un vettore colonna e $v_i B$ è un numero: H è una combinazione dei modi naturali, con peso $v_i B$.

Definizione – Modo eccitabile

Con un solo ingresso, il modo naturale i -esimo è **eccitabile** (con impulsi in ingresso) se

$$v_i B \neq 0,$$

e **non eccitabile** se $v_i B = 0$.

Il nome viene dalla risposta a un impulso del Capitolo 2: con $x_0 = 0$ e $u(\tau) = \delta(\tau)$ lo stato è $x(t) = H(t)$, e vi compaiono solo i modi eccitabili. Un modo non eccitabile non compare nello stato, qualunque sia l'impulso in ingresso.

Nota – Errore tipico

Eccitabilità e osservabilità sono proprietà di un *modo naturale*, non di uno stato.

3 Struttura del sistema e stato iniziale

Osservazione – Che cosa decide se un modo compare

$v_i B$ e $c_i = v_i x_0$ hanno la stessa forma, ma dipendono da cose diverse:

- B è data dal sistema: se $v_i B = 0$, il modo manca sempre da H ;
- x_0 si sceglie: con $v_i x_0 = 0$ il modo manca dall'evoluzione libera da quel solo x_0 .

Per uno stato iniziale qualsiasi tutti i c_i sono diversi da zero e nell'evoluzione libera compaiono tutti i modi. Se un modo diverge, $\lambda_1 > 0$, lo si evita scegliendo x_0 con $v_1 x_0 = 0$: lo stato parte nel sottospazio degli altri autovettori, vi resta (Capitolo 3, «Partire sugli autovettori») e, se gli altri autovalori sono negativi, va verso l'origine.

4 Più ingressi e più uscite

Con p ingressi $B = (b_1 \cdots b_p)$ ha p colonne e

$$v_i B = \begin{pmatrix} v_i b_1 & \cdots & v_i b_p \end{pmatrix}$$

è una riga di p numeri.

Definizione – Eccitabilità con più ingressi

Il modo naturale i -esimo è **eccitabile** se la riga $v_i B$ non è tutta nulla, e **eccitabile dall'ingresso** j se $v_i b_j \neq 0$.

La colonna j di H è la risposta a un impulso sul solo ingresso j (Capitolo 2), e vale $\sum_i e^{\lambda_i t} u_i (v_i b_j)$: il modo compare in quella colonna se e solo se $v_i b_j \neq 0$. Per esempio, con cinque ingressi e $v_i B = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$ il modo è eccitabile, ma soltanto da un impulso sul primo ingresso.

Se non si chiede da quale ingresso, basta controllare che $v_i B$ non sia la riga nulla. Con più uscite vale lo stesso per le colonne: $C u_i$ ha q componenti, e il modo si vede nell'uscita k se la componente k di $C u_i$ non è nulla.

5 I modi nella risposta impulsiva in uscita

Proposizione – Risposta impulsiva in uscita

$$W(t) = C e^{At} B + D \delta(t) = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} (C u_i) (v_i B) + D \delta(t)$$

Il modo i -esimo compare in W se e solo se è eccitabile e osservabile.

Si porta C dentro la somma di H : il modo i ha il peso $(C u_i)(v_i B)$, nullo appena uno dei due fattori è nullo. $D \delta(t)$ è il legame diretto e non contiene modi.

matrice	con i modi	compaiono i modi
$\Phi(t) = e^{At}$	$\sum_i e^{\lambda_i t} u_i v_i$	tutti
$H(t) = e^{At} B$	$\sum_i e^{\lambda_i t} u_i (v_i B)$	eccitabili
$\Psi(t) = C e^{At}$	$\sum_i e^{\lambda_i t} (C u_i) v_i$	osservabili
$W(t) - D \delta(t)$	$\sum_i e^{\lambda_i t} (C u_i)(v_i B)$	eccitabili e osservabili

Osservazione – Due cause per un modo assente

Se un modo manca da W , è non eccitabile oppure non osservabile, o entrambe le cose: W da sola non dice quale. Per saperlo si controllano $C u_i$ e $v_i B$ separatamente.

Per analizzare un sistema quindi:

1. si calcolano autovalori, autovettori e U^{-1} (Capitolo 3);
2. i modi con $C u_i = 0$ sono non osservabili;
3. i modi con $v_i B = 0$ sono non eccitabili;
4. in W restano i modi eccitabili e osservabili.

Gli esercizi 1 e 2 seguono questi passi.

6 Il cambio di coordinate

Definizione – Cambio di coordinate

Un **cambio di coordinate** nello spazio di stato è

$$z = T x, \quad x = T^{-1} z$$

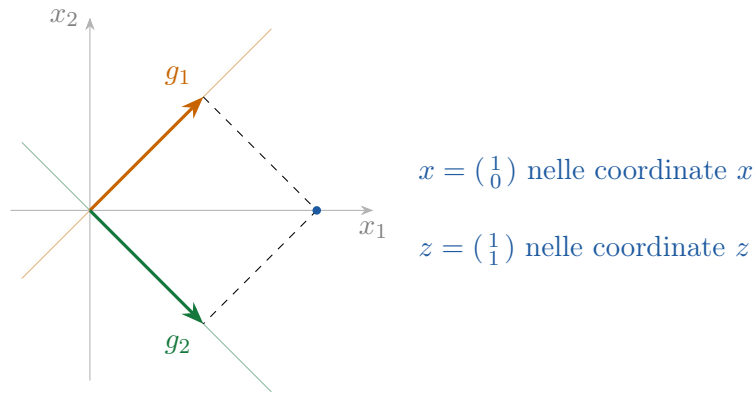
con T di $n \times n$ invertibile e costante. x e z sono lo stesso stato, letto in due basi diverse.

Lo stato del modello fisico ha componenti con un significato (carica di un condensatore, posizione, temperatura), ma ciascuna evolve con molti esponenziali. In un'altra base, anche non ortogonale, la dinamica può leggersi meglio, mentre le nuove componenti in genere non sono più grandezze fisiche.

Proposizione – Le colonne di T^{-1}

Le colonne di T^{-1} sono i vettori della nuova base, scritti nelle vecchie coordinate:
 $x = T^{-1} z = \sum_i z_i g_i$, dove g_i è la colonna i di T^{-1} .

Con $z = e_1$, cioè $z_1 = 1$ e le altre componenti nulle, $x = T^{-1} e_1$ è la prima colonna: muovere la sola z_1 vuol dire muoversi lungo il primo vettore della nuova base. Lo stesso vale per ogni colonna. Per costruire un cambio di coordinate si mettono quindi i vettori della nuova base come colonne di T^{-1} , nell'ordine che si vuole per le componenti di z , e si inverte.



Nella figura la nuova base è $g_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ e $g_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$: lo stesso punto ha coordinate $(1, 0)$ nella base di partenza e $(1, 1)$ nella nuova, perché è $g_1 + g_2$.

Proposizione – Il sistema nelle nuove coordinate

Con $z = T x$ il sistema $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx + Du$ diventa

$$\dot{z} = \tilde{A}z + \tilde{B}u, \quad y = \tilde{C}z + \tilde{D}u,$$

$$\tilde{A} = TAT^{-1}, \quad \tilde{B} = TB, \quad \tilde{C} = CT^{-1}, \quad \tilde{D} = D$$

Il sistema resta lineare e stazionario.

Dimostrazione

1. **Stato.** T è costante: $\dot{z} = T\dot{x} = TAx + TBu$.
2. **Si elimina x .** Con $x = T^{-1}z$: $\dot{z} = TAT^{-1}z + TBu$.
3. **Uscita.** $y = CT^{-1}z + Du$.

□

D non cambia perché lega direttamente l'ingresso all'uscita, senza passare per lo stato. $\tilde{A}$ e A sono **simili**: la similitudine delle matrici è un cambio di coordinate del sistema. Al contrario, da $\tilde{A}$ si ritrova $A = T^{-1}\tilde{A}T$.

7 La base degli autovettori

Proposizione – Coordinate degli autovettori

Con gli autovettori come nuova base, cioè

$$T = U^{-1}, \quad z = U^{-1}x, \quad x = Uz$$

la matrice dinamica diventa diagonale: $\tilde{A} = U^{-1}AU = \Lambda$.

Basta confrontare $A = U\Lambda U^{-1}$ (Capitolo 3) con $A = T^{-1}\tilde{A}T$: con $T = U^{-1}$ si ha $\tilde{A} = \Lambda$. Le colonne di $T^{-1} = U$ sono proprio gli autovettori, come chiede la proposizione sulle colonne di T^{-1} . Ogni ordine degli autovettori va bene, e l'ordine degli autovalori in Λ lo segue.

Osservazione – Ogni coordinata è un modo

Nelle coordinate degli autovettori la componente $z_i = v_i x$ evolve da sola:

$$\dot{z}_i = \lambda_i z_i + (v_i B) u, \quad y = \sum_{i=1}^n (C u_i) z_i + D u.$$

Le righe di $\tilde{B} = U^{-1}B$ sono le $v_i B$ e le colonne di $\tilde{C} = CU$ le $C u_i$: un modo non eccitabile ha la riga di $\tilde{B}$ nulla, uno non osservabile la colonna di $\tilde{C}$ nulla.

Con $u = 0$ e $z_i(t_0) = v_i x_0 = c_i$ si ritrova $z_i(t) = c_i e^{\lambda_i(t-t_0)}$, l'ampiezza del modo lungo u_i del Capitolo 3.

Riepilogo

- **Uscita libera:** $y(t) = \sum_i c_i e^{\lambda_i(t-t_0)} C u_i$, con $c_i = v_i x_0$.
- **Modo non osservabile:** $C u_i = 0$; manca dall'uscita per ogni x_0 .
- **Risposta impulsiva nello stato:** $H(t) = \sum_i e^{\lambda_i t} u_i (v_i B)$.
- **Modo eccitabile:** $v_i B \neq 0$; dall'ingresso j se $v_i b_j \neq 0$.
- **Struttura e scelta:** $v_i B$ dipende dal sistema, $c_i = v_i x_0$ dallo stato iniziale.
- **Risposta impulsiva in uscita:** $W(t) = \sum_i e^{\lambda_i t} (C u_i)(v_i B) + D \delta(t)$: solo i modi eccitabili e osservabili.
- **Cambio di coordinate:** $z = T x$ dà $(T A T^{-1}, T B, C T^{-1}, D)$; le colonne di T^{-1} sono la nuova base.
- **Base degli autovettori:** $T = U^{-1}$ dà $\tilde{A} = \Lambda$, righe di $\tilde{B}$ le $v_i B$, colonne di $\tilde{C}$ le $C u_i$.

8 Esercizi

Esercizio 1 – Appello del 12/04/2023, Canale 1, Prof. Paolo Di Giamberardino, esercizio 1

Dato il sistema descritto dalle equazioni

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} u(t), \quad y(t) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} x(t) + 2 u(t),$$

fornirne la rappresentazione in forma esplicita e commentare il risultato sulla base di un'analisi modale.

Soluzione a pagina 9 →

Esercizio 2 – Appello del 30/01/2023, Canale 1, Prof. Paolo Di Giamberardino, esercizio 1, adattato

Si consideri il sistema descritto da

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} u(t), \quad y(t) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} x(t).$$

1. Scrivere esplicitamente i modi naturali e studiarne le proprietà di eccitabilità ed osservabilità.
2. Determinare, se esistono, tutti gli stati iniziali tali che l'evoluzione libera (nello stato) si mantenga limitata al crescere del tempo.

3. Determinare, se esistono, tutti gli stati iniziali tali che l'evoluzione libera in uscita si mantenga limitata al crescere del tempo.
4. Calcolare la risposta forzata del sistema all'ingresso

$$u(t) = (t + 1 + \cos(t)) \delta_{-1}(t - 2).$$

Con δ_{-1} si indica il gradino unitario: $\delta_{-1}(t) = 1$ per $t \geq 0$ e 0 per $t < 0$.

Soluzione a pagina 10 →

9 Soluzioni

Soluzione dell'Esercizio 1 – Appello del 12/04/2023, Canale 1, Prof. Paolo Di Giamberardino, esercizio 1

1. **Autovalori e autovettori.** $\det(A - \lambda I) = (-5 - \lambda)(5 - \lambda) + 16 = \lambda^2 - 9$: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -3$. Per un vettore di componenti a e b , $(A - 3I)u = 0$ dà $b = 2a$ e $(A + 3I)u = 0$ dà $a = 2b$:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad U^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

quindi $v_1 = \frac{1}{3}(-1 \ 2)$ e $v_2 = \frac{1}{3}(2 \ -1)$.

2. **Eccitabilità e osservabilità.** $v_1 B = \frac{1}{3}(-1 + 4) = 1$, $v_2 B = \frac{1}{3}(2 - 2) = 0$, $Cu_1 = 2 - 2 = 0$, $Cu_2 = 4 - 1 = 3$.

3. **Matrici della forma esplicita.** Con le formule della Sezione 5:

$$\Phi(t) = e^{3t}u_1v_1 + e^{-3t}u_2v_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -e^{3t} + 4e^{-3t} & 2e^{3t} - 2e^{-3t} \\ -2e^{3t} + 2e^{-3t} & 4e^{3t} - e^{-3t} \end{pmatrix},$$

$$H(t) = e^{3t}u_1(v_1B) = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \Psi(t) = e^{-3t}(Cu_2)v_2 = e^{-3t} \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$W(t) = e^{3t}(Cu_1)(v_1B) + e^{-3t}(Cu_2)(v_2B) + 2\delta(t) = 2\delta(t).$$

In $t = 0$, $\Phi(0) = I$.

4. **Forma esplicita.** Per la proprietà di campionamento l'impulso $2\delta(t - \tau)$ dà $2u(t)$:

$$x(t) = \Phi(t - t_0)x_0 + \int_{t_0}^t e^{3(t-\tau)} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} u(\tau) d\tau,$$

$$y(t) = e^{-3(t-t_0)} \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} x_0 + 2u(t).$$

5. **Commento.** Il modo e^{3t} , lungo u_1 , cresce ed è eccitabile ma non osservabile: compare in Φ e in H , non in Ψ . Il modo e^{-3t} , lungo u_2 , è osservabile ma non eccitabile: compare in Φ e in Ψ , non in H . Nessun modo è eccitabile e osservabile, e in W resta solo il legame diretto: la risposta forzata in uscita è $2u(t)$, mentre la risposta impulsiva nello stato cresce come e^{3t} lungo u_1 senza che l'uscita lo mostri.

[← Torna all'Esercizio 1, pagina 7](#)

Soluzione dell'Esercizio 2 – Appello del 30/01/2023, Canale 1, Prof. Paolo Di Giamberardino, esercizio 1, adattato

1. **Autovalori.** Sviluppando sulla prima riga, $\det(A - \lambda I) = (2 - \lambda)(\lambda^2 - 1)$: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$, reali e distinti. Per un vettore di componenti a , b , c : con $\lambda = 2$ si ha $b = -a$, $c = a$; con $\lambda = 1$, $a = 0$, $c = b$; con $\lambda = -1$, $a = 0$, $c = -b$:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

I modi naturali sono $c_1 e^{2(t-t_0)} u_1$, $c_2 e^{t-t_0} u_2$ e $c_3 e^{-(t-t_0)} u_3$, con $c_i = v_i x_0$.

Eccitabilità e osservabilità. $v_1 B = 1$, $v_2 B = -1 + 1 = 0$, $v_3 B = -1 + 1 + 1 = 1$; $C u_1 = -2 + 1 + 1 = 0$, $C u_2 = -1 + 1 = 0$, $C u_3 = 1 + 1 = 2$.

modo	legge	eccitabile	osservabile
$\lambda_1 = 2$	e^{2t}	sì	no
$\lambda_2 = 1$	e^t	no	no
$\lambda_3 = -1$	e^{-t}	sì	sì

2. **Stato limitato.** e^{2t} ed e^t crescono senza limite, e^{-t} va a zero: l'evoluzione libera resta limitata se e solo se $c_1 = c_2 = 0$, cioè $v_1 x_0 = x_{0,1} = 0$ e $v_2 x_0 = \frac{1}{2}(x_{0,2} + x_{0,3}) = 0$. Sono gli stati sulla retta di u_3 , $x_0 = \alpha u_3$ con $\alpha \in \mathbb{R}$; da lì $x(t) = \alpha e^{-(t-t_0)} u_3$ va verso l'origine.
3. **Uscita limitata.** $C u_1 = C u_2 = 0$, quindi

$$y(t) = c_3 e^{-(t-t_0)} C u_3 = (-2x_{0,1} - x_{0,2} + x_{0,3}) e^{-(t-t_0)},$$

cioè $(C x_0) e^{-(t-t_0)}$: l'uscita libera è limitata, e va a zero, per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^3$. I due modi che crescono non sono osservabili.

4. **Risposta forzata.** Solo λ_3 è eccitabile e osservabile: $W(t) = e^{-t}(C u_3)(v_3 B) = 2e^{-t}$, senza impulso perché $D = 0$. Con stato iniziale nullo e $u = 0$ prima di $t = 2$, l'uscita è nulla per $t < 2$; per $t \geq 2$

$$y(t) = \int_2^t 2e^{-(t-\tau)} (\tau + 1 + \cos \tau) d\tau = 2e^{-t} \left[\tau e^\tau + \frac{1}{2} e^\tau (\cos \tau + \sin \tau) \right]_2^t,$$

perché τe^τ è una primitiva di $(\tau + 1)e^\tau$ e $\frac{1}{2} e^\tau (\cos \tau + \sin \tau)$ di $e^\tau \cos \tau$. Quindi

$$y(t) = 2t + \cos t + \sin t - (4 + \cos 2 + \sin 2) e^{-(t-2)}, \quad t \geq 2,$$

che vale 0 in $t = 2$.

[← Torna all'Esercizio 2, pagina 7](#)