

Appunti di Sistemi Dinamici

Canale 1 · Prof. Paolo Di Giamberardino

Capitolo 5: Autovalori multipli e autovalori complessi

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dalle lezioni in aula e dal materiale del corso

Argomenti: Molteplicità algebrica e geometrica · Le matrici residue e il loro rango
Autospazi invarianti · Osservabilità ed eccitabilità con autovalori multipli
Coppie complesse coniugate · Il blocco reale e il suo esponenziale
La forma reale a blocchi · Il modo naturale pseudoperiodico
Osservabilità ed eccitabilità di una coppia · Dall'equazione differenziale allo stato

Indice

1	Autovalori ripetuti	1
2	Le matrici residue e il loro rango	2
3	Autospazi invarianti	3
4	Osservabilità ed eccitabilità con autovalori ripetuti	4
5	Coppie di autovalori complessi coniugati	6
6	Il blocco reale e il suo esponenziale	7
7	La forma reale a blocchi	9
8	Il modo naturale pseudoperiodico	11
9	Osservabilità ed eccitabilità di un modo pseudoperiodico	13
10	Dall'equazione differenziale allo stato	14
11	Esercizi	15
12	Soluzioni	18

Il Capitolo 4 chiede n autovalori reali e distinti, mentre la forma spettrale del Capitolo 3 chiede soltanto n autovettori indipendenti. Qui l'ipotesi si allarga:

- gli autovalori reali possono ripetersi, purché A abbia ancora n autovettori indipendenti;
- possono comparire coppie di autovalori complessi coniugati, ciascuna semplice.

Le Sezioni 1-4 trattano gli autovalori reali, le Sezioni 5-9 le coppie complesse; la Sezione 10 ricava lo stato da un'equazione differenziale. Il sistema ha p ingressi e q uscite, come nel Capitolo 4.

1 Autovalori ripetuti

Definizione – Molteplicità algebrica e geometrica

Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_K$ gli autovalori *distinti* di A , con

$$\det(A - \lambda I) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{r_1} \cdots (\lambda - \lambda_K)^{r_K}, \quad r_1 + \cdots + r_K = n.$$

- La **molteplicità algebrica** di λ_i è l'esponente r_i .
- La **molteplicità geometrica** g_i è il numero massimo di autovettori indipendenti di λ_i , cioè la dimensione dell'**autospazio**

$$E_i := \text{Ker}(A - \lambda_i I), \quad g_i = n - \text{rk}(A - \lambda_i I).$$

Le radici contate con la loro molteplicità sono sempre n : un autovalore doppio vale come due autovalori con lo stesso valore. Per ognuno, però, gli autovettori vengono da un solo sistema $(A - \lambda_i I)u = 0$, e si ha sempre $1 \leq g_i \leq r_i$.

Teorema – Autovalori ripetuti e forma spettrale

Se per ogni autovalore la molteplicità geometrica è uguale a quella algebrica,

$$g_i = r_i \quad \text{per } i = 1, \dots, K$$

allora A ha n autovettori indipendenti: si sceglie una base $u_{i1}, \dots, u_{ir_i}$ di ogni autospazio E_i . Con questi autovettori come colonne di U , e con λ_i ripetuto r_i volte nella diagonale di Λ , valgono la forma spettrale e l'esponenziale del Capitolo 3:

$$A = U \Lambda U^{-1}, \quad e^{At} = \sum_{i=1}^K \sum_{h=1}^{r_i} e^{\lambda_i t} u_{ih} v_{ih},$$

dove v_{ih} è la riga di U^{-1} nella stessa posizione della colonna u_{ih} .

Si procede come se le r_i occorrenze di λ_i fossero autovalori diversi con lo stesso valore: le basi dei diversi autospazi, insieme, restano indipendenti. Se per qualche autovalore $g_i < r_i$, gli autovettori non bastano a costruire U : quel caso resta fuori da questo capitolo.

Esempio – Un autovalore doppio

Con $\lambda_1 = 1$ doppio, $g_1 = 2$, e $\lambda_2 = 2$ semplice, in $\mathbb{R}^3$:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}, \quad e^{At} = e^t u_{11} v_{11} + e^t u_{12} v_{12} + e^{2t} u_{21} v_{21}.$$

I primi due modi naturali avanzano lungo autovettori diversi, ma con la stessa legge temporale e^t : se uno cresce, l'altro cresce allo stesso modo.

2 Le matrici residue e il loro rango

Proposizione – Raggruppamento per autovalore

Raccogliendo i termini con la stessa legge temporale,

$$e^{At} = \sum_{i=1}^K e^{\lambda_i t} R_i, \quad R_i := \sum_{h=1}^{r_i} u_{ih} v_{ih} = U_i V_i$$

con $U_i = (u_{i1} \cdots u_{ir_i})$ di $n \times r_i$ e V_i la matrice $r_i \times n$ delle righe $v_{i1}, \dots, v_{ir_i}$. La **matrice residua** R_i ha

$$\text{rk } R_i = r_i, \quad \text{Im } R_i = E_i.$$

Dimostrazione

1. **Un termine.** $u_{ih} v_{ih}$ è una colonna per una riga: una matrice $n \times n$ di rango 1.
2. **La somma.** $\sum_h u_{ih} v_{ih}$ è il prodotto righe per colonne $U_i V_i$, di una $n \times r_i$ per una $r_i \times n$.
3. **Il rango.** Le righe di V_i sono righe di U^{-1} , quindi indipendenti: $V_i w$ percorre tutto $\mathbb{R}^{r_i}$ al variare di w . Allora $\text{Im } R_i = \text{Im } U_i$, che è generato dalla base $u_{i1}, \dots, u_{ir_i}$ di E_i e ha dimensione r_i .

□

Osservazione – Le molteplicità si leggono in e^{At}

Quando e^{At} è calcolata, ogni legge $e^{\lambda_i t}$ compare sparsa negli elementi. Se le leggi diverse sono meno di n , qualche autovalore è ripetuto, e la molteplicità di λ_i è il rango della matrice R_i che moltiplica $e^{\lambda_i t}$.

Le R_i non dipendono dagli autovettori scelti: sono i coefficienti di e^{At} rispetto alle leggi $e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_K t}$, che sono funzioni indipendenti. Inoltre $\sum_i R_i = e^{A \cdot 0} = I$. Nell'appello dell'11/02/2022 del Capitolo 3, per esempio, e^{-t} ha coefficiente $I - u_1 v_1$, di rango 2: l'autovalore -1 è doppio. L'Esercizio 1 ricava autovalori e autospazi da e^{At} .

3 Autospazi invarianti

Proposizione – Partire in un autospazio

Ogni vettore non nullo di E_i è un autovettore di λ_i , e E_i è invariante. Se $x_0 \in E_i$, l'evoluzione libera è

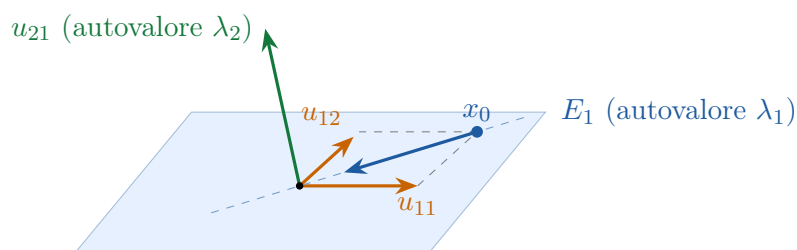
$$x(t) = e^{\lambda_i(t-t_0)} x_0$$

Se $x_0 \neq 0$ lo stato resta sulla retta per l'origine e per x_0 , fermo in x_0 se $\lambda_i = 0$; se $x_0 = 0$ resta nell'origine.

Dimostrazione

1. **Autovettore.** Se $x_0 = \sum_h c_{ih} u_{ih}$, allora $Ax_0 = \sum_h c_{ih} \lambda_i u_{ih} = \lambda_i x_0$.
2. **Evoluzione.** Per la forma spettrale $e^{A(t-t_0)} x_0 = \sum_h c_{ih} e^{\lambda_i(t-t_0)} u_{ih}$: tutte le componenti hanno la stessa legge, e si raccoglie $e^{\lambda_i(t-t_0)}$.

□



Nella figura $\lambda_1 < 0$ e x_0 sta nel piano E_1 : le sue componenti lungo u_{11} e u_{12} si riducono con la stessa legge, restano in proporzione, e lo stato va verso l'origine lungo la retta tratteggiata. Si muove come lungo un autovettore: e infatti ogni vettore non nullo di quella retta lo è, perché sta in E_1 .

Osservazione – La base dell'autospazio è una scelta

$(A - \lambda_i I) u = 0$ individua il sottospazio E_i , non una sua base: qualunque coppia indipendente del piano E_1 poteva essere presa come u_{11}, u_{12} . Le rette di u_{11} e u_{12} sono invarianti, ma lo è anche ogni retta di E_1 : per un autovalore ripetuto è l'autospazio intero a essere invariante.

I termini con la stessa legge $e^{\lambda_i t}$ sono quindi r_i modi naturali che si distinguono solo per la direzione. Presi insieme, formano l'evoluzione nell'autospazio E_i : è a questo insieme che ci si riferisce come al **modo di λ_i** .

4 Osservabilità ed eccitabilità con autovalori ripetuti

Con λ_1 doppio l'uscita libera contiene $e^{\lambda_1 t} (c_{11} C u_{11} + c_{12} C u_{12})$. Può accadere che $C u_{11} = 0$ e $C u_{12} \neq 0$: la legge $e^{\lambda_1 t}$ compare in Ψ , e quindi nell'uscita libera da ogni x_0 con $c_{12} \neq 0$. Con un'altra base di E_1 entrambi i prodotti potrebbero essere non nulli: guardare i singoli autovettori darebbe un risultato che dipende dalla base.

Definizione – Osservabilità ed eccitabilità del modo di λ_i

- Il modo di λ_i è **non osservabile** se C annulla tutto l'autospazio, cioè tutti i vettori della base:

$$C u_{ih} = 0 \quad \text{per } h = 1, \dots, r_i \quad \Longleftrightarrow \quad C U_i = 0;$$

è **osservabile** altrimenti.

- Il modo di λ_i è **non eccitabile** se

$$v_{ih} B = 0 \quad \text{per } h = 1, \dots, r_i \quad \Longleftrightarrow \quad V_i B = 0;$$

è **eccitabile** altrimenti.

Proposizione – Le condizioni non dipendono dalla base

1. Il modo di λ_i è non osservabile se e solo se la legge $e^{\lambda_i t}$ manca da $\Psi(t) = C e^{At}$, cioè

$$C R_i = 0.$$

2. Il modo di λ_i è non eccitabile se e solo se la legge $e^{\lambda_i t}$ manca da $H(t) = e^{At} B$, cioè

$$R_i B = 0.$$

Dimostrazione

1. **Le leggi.** $\Psi = \sum_i e^{\lambda_i t} C R_i$ e $H = \sum_i e^{\lambda_i t} R_i B$; le leggi distinte sono indipendenti, quindi $e^{\lambda_i t}$ manca se e solo se il suo coefficiente è nullo.
2. **Uscita.** $C R_i = (C U_i) V_i$, e le righe di V_i sono indipendenti: $C R_i = 0$ se e solo se $C U_i = 0$.
3. **Ingresso.** $R_i B = U_i (V_i B)$, e le colonne di U_i sono indipendenti: $R_i B = 0$ se e solo se $V_i B = 0$.

R_i non dipende dalla base scelta in E_i , e quindi nemmeno le due condizioni. $\square$

Con le matrici residue la tabella del Capitolo 4 diventa:

matrice	coefficiente di $e^{\lambda_i t}$	manca se
$\Phi(t) = e^{At}$	$R_i = U_i V_i$	mai
$H(t) = e^{At} B$	$R_i B = U_i (V_i B)$	il modo è non eccitabile
$\Psi(t) = C e^{At}$	$C R_i = (C U_i) V_i$	il modo è non osservabile
$W(t) - D \delta(t)$	$C R_i B = (C U_i)(V_i B)$	vedi la nota

Nota – Errore tipico

Con $r_i > 1$, eccitabile e osservabile *non* basta perché $e^{\lambda_i t}$ compaia in W : il suo coefficiente nella tabella è il prodotto di una $q \times r_i$ per una $r_i \times p$, e può essere la matrice nulla anche se nessuno dei due fattori è nullo. Resta vero il contrario: se la legge compare in W , il modo è eccitabile e osservabile.

L'Esercizio 5 ne è un esempio: il modo di -1 è eccitabile e osservabile, ma W non lo contiene.

Il libro chiama *completamente* osservabile il modo con $C u \neq 0$ per ogni $u \neq 0$ di E_i , e completamente eccitabile quello con $v B \neq 0$ per ogni riga $v \neq 0$ generata da V_i : condizioni più forti di queste.

5 Coppie di autovalori complessi coniugati

Proposizione – Autovalori e autovettori coniugati

Sia A reale e $\lambda = \alpha + i\omega$, con $\omega > 0$, un suo autovalore con autovettore $u = u_A + i u_B$, dove $u_A, u_B \in \mathbb{R}^n$. Allora

$$\bar{\lambda} = \alpha - i\omega \text{ è autovalore con autovettore } \bar{u} = u_A - i u_B$$

Basta coniugare $Au = \lambda u$: A è reale, quindi $A\bar{u} = \bar{\lambda}\bar{u}$. Trovato l'autovettore di λ , quello di $\bar{\lambda}$ non richiede conti. Della coppia si prende sempre come λ l'autovalore con parte immaginaria positiva. I due autovalori sono distinti, e la forma spettrale del Capitolo 3 vale ancora, ma con U e Λ complesse.

Lo stato, però, è una grandezza fisica reale: in $e^{At}x_0$ le parti immaginarie devono annullarsi da sole. Per vederlo, e per disegnare le traiettorie, si cercano due vettori reali che, con coefficienti complessi, generino lo stesso sottospazio di u e $\bar{u}$.

Il sottospazio della coppia è invariante, come quello generato da alcuni autovettori nel Capitolo 3: si può lavorare solo lì, e il resto della base non cambia.

Proposizione – Parte reale e parte immaginaria

$Au = \lambda u$ equivale alle due equazioni reali

$$A u_A = \alpha u_A - \omega u_B, \quad A u_B = \omega u_A + \alpha u_B$$

Dimostrazione

1. **Sviluppo.** $(A - \lambda I)u = (A - \alpha I - i\omega I)(u_A + i u_B) = (A - \alpha I)u_A + \omega u_B + i[(A - \alpha I)u_B - \omega u_A]$, perché $i \cdot i = -1$.
2. **Separazione.** Un vettore complesso è nullo se e solo se lo sono la parte reale e la parte immaginaria.

□

Si può quindi risolvere il sistema complesso $(A - \lambda I)u = 0$, oppure il sistema reale delle due equazioni della proposizione, con $2n$ incognite: le componenti di u_A e di u_B .

Proposizione – La base reale della coppia

$$\begin{pmatrix} u & \bar{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_A & u_B \end{pmatrix} M, \quad M := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}, \quad M^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}.$$

M è invertibile, quindi u_A e u_B sono indipendenti e

$$P := \{a u_A + b u_B : a, b \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

è un **piano reale invariante**. Con coefficienti complessi, u_A e u_B generano lo stesso sottospazio di u e $\bar{u}$.

La prima colonna di $(u_A \ u_B)M$ è $u_A + i u_B = u$, la seconda $u_A - i u_B = \bar{u}$, e $\det M = -2i \neq 0$; u e $\bar{u}$ sono indipendenti perché sono autovettori di autovalori distinti. P è invariante per le due equazioni della proposizione precedente: A manda u_A e u_B in loro combinazioni reali.

6 Il blocco reale e il suo esponenziale

Proposizione – Blocco reale di una coppia

Nella base (u_A, u_B) del suo piano, la coppia $\alpha \pm i\omega$ è rappresentata dal blocco reale

$$J := \begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} u_A & u_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_A & u_B \end{pmatrix} J$$

Dimostrazione

1. **Per colonne.** Le colonne di J sono le coordinate di Au_A e di Au_B nella base (u_A, u_B) ; per le due equazioni reali sono

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ -\omega \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} \omega \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

2. **Dalla forma complessa.** Equivalentemente $J = M \Lambda_c M^{-1}$, con Λ_c la diagonale di λ e $\bar{\lambda}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \lambda + \bar{\lambda} & -i(\lambda - \bar{\lambda}) \\ i(\lambda - \bar{\lambda}) & \lambda + \bar{\lambda} \end{pmatrix},$$

$$\text{e } \lambda + \bar{\lambda} = 2\alpha, \lambda - \bar{\lambda} = 2i\omega.$$

□

Proposizione – Esponenziale del blocco reale

$$e^{Jt} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix}$$

Dimostrazione

1. **Diagonale complessa.** $J = M\Lambda_e M^{-1}$, quindi, come per la forma spettrale, $e^{Jt} = M e^{\Lambda_e t} M^{-1}$, con $e^{\lambda t} = e^{\alpha t} e^{i\omega t}$ ed $e^{\bar{\lambda} t} = e^{\alpha t} e^{-i\omega t}$.

2. **Prodotto.** Si raccoglie $e^{\alpha t}$:

$$e^{Jt} = \frac{e^{\alpha t}}{2} \begin{pmatrix} e^{i\omega t} + e^{-i\omega t} & -i(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) \\ i(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) & e^{i\omega t} + e^{-i\omega t} \end{pmatrix}.$$

3. **Eulero.** $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$ ed $e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta$, con $\theta = \omega t$: l'unità immaginaria sparisce.

□

Osservazione – Nel piano della coppia nessuna retta è invariante

u_A e u_B non sono autovettori: per la prima equazione reale, Au_A ha una componente lungo u_B ed esce dalla retta di u_A . È invariante il piano, preso tutto insieme. Un autovalore reale dà una retta invariante, una coppia complessa un piano invariante.

Proposizione – Evoluzione nel piano della coppia

Se x_0 sta nel piano P , con coordinate z_0 rispetto a (u_A, u_B) , le coordinate dello stato sono

$$z(t) = e^{J(t-t_0)} z_0.$$

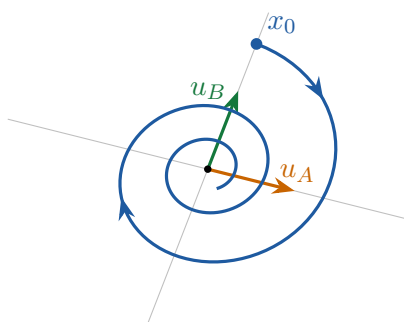
$e^{J(t-t_0)}$ ruota le coordinate di un angolo e ne moltiplica l'ampiezza per un fattore:

$$\text{angolo } \omega(t - t_0), \quad \text{fattore } e^{\alpha(t-t_0)}.$$

Se $x_0 = 0$ lo stato resta nell'origine. Se $x_0 \neq 0$ gira attorno all'origine, da u_B verso u_A :

- si avvicina a spirale se $\alpha < 0$;
- si allontana a spirale se $\alpha > 0$;
- se $\alpha = 0$ percorre una curva chiusa, di periodo

$$\frac{2\pi}{\omega}.$$



piano di u_A e u_B , $\alpha < 0$

7 La forma reale a blocchi

Teorema – Forma reale a blocchi

Sia A reale con autovalori reali $\lambda_1, \dots, \lambda_\mu$, ripetuti secondo la molteplicità e con $g_i = r_i$, e coppie semplici $\alpha_k \pm i\omega_k$, $k = 1, \dots, \nu$, con $\omega_k > 0$ e $\mu + 2\nu = n$. Con

$$T^{-1} := \begin{pmatrix} u_1 & \cdots & u_\mu & u_{1A} & u_{1B} & \cdots & u_{\nu A} & u_{\nu B} \end{pmatrix}$$

reale e invertibile, e J_k il blocco reale della coppia k :

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \lambda_\mu & & & & \\ & & & J_1 & & & \\ & & & & \ddots & & \end{pmatrix}, \quad e^{At} = T^{-1} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & e^{\lambda_\mu t} & & & & \\ & & & e^{J_1 t} & & & \\ & & & & \ddots & & \end{pmatrix} T$$

con tutti zeri fuori dai blocchi.

Dimostrazione

1. **Forma complessa.** Si parte da $A = U\Lambda U^{-1}$, con le coppie $(u \ \bar{u})$ fra le colonne di U .
2. **Cambio di base nel piano.** Per ogni coppia si sostituisce $(u \ \bar{u})$ con $(u_A \ u_B)M$: le altre colonne non cambiano, e il blocco $\text{diag}(\lambda, \bar{\lambda})$ di Λ diventa $M \text{diag}(\lambda, \bar{\lambda}) M^{-1} = J$.
3. **Esponenziale.** Le potenze di una matrice diagonale a blocchi si fanno blocco per blocco: l'esponenziale è la diagonale degli esponenziali dei blocchi.

□

Con le righe $v_1, \dots, v_\mu, v_{1A}, v_{1B}, \dots$ di T la stessa formula si scrive come somma, per autovalori e coppie:

$$e^{At} = \sum_{i=1}^{\mu} e^{\lambda_i t} u_i v_i + \sum_{k=1}^{\nu} e^{\alpha_k t} \begin{pmatrix} u_{kA} & u_{kB} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \omega_k t & \sin \omega_k t \\ -\sin \omega_k t & \cos \omega_k t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{kA} \\ v_{kB} \end{pmatrix}$$

Tutto è reale: nell'esponenziale compaiono esponenziali e, per le coppie, seni e coseni moltiplicati per $e^{\alpha_k t}$.

Per calcolare e^{At} in forma reale quindi:

1. si trovano gli autovalori con $\det(A - \lambda I) = 0$;
2. per ogni autovalore reale si trova una base di E_i , controllando che $g_i = r_i$;
3. per ogni coppia si trova un autovettore u di $\alpha + i\omega$ e se ne prendono u_A e u_B ;
4. si costruiscono T^{-1} e T , e si calcola e^{At} con il teorema.

L'Esercizio 3 segue questi passi; l'Esercizio 2 scrive tutta la forma esplicita nelle nuove coordinate.

8 Il modo naturale pseudoperiodico

Proposizione – Evoluzione libera di una coppia

Con $t_0 = 0$, $c_{kA} := v_{kA} x_0$ e $c_{kB} := v_{kB} x_0$, si pone

$$m_k := \sqrt{c_{kA}^2 + c_{kB}^2}, \quad c_{kA} = m_k \sin \varphi_k, \quad c_{kB} = m_k \cos \varphi_k.$$

La coppia $\alpha_k \pm i\omega_k$ contribuisce all'evoluzione libera con

$$m_k e^{\alpha_k t} [\sin(\omega_k t + \varphi_k) u_{kA} + \cos(\omega_k t + \varphi_k) u_{kB}]$$

Dimostrazione

1. **Il termine della coppia.** Dalla somma della Sezione 7, applicata a x_0 :

$$\begin{aligned} e^{\alpha t} \begin{pmatrix} u_A & u_B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_A \\ c_B \end{pmatrix} \\ = e^{\alpha t} [(c_A \cos \omega t + c_B \sin \omega t) u_A + (-c_A \sin \omega t + c_B \cos \omega t) u_B], \end{aligned}$$

senza l'indice k .

2. **Ampiezza e fase.** (c_B, c_A) è un punto del piano: m è la sua distanza dall'origine e φ il suo angolo, quindi m e φ esistono sempre.
3. **Addizione.** $c_A \cos \omega t + c_B \sin \omega t = m(\sin \varphi \cos \omega t + \cos \varphi \sin \omega t) = m \sin(\omega t + \varphi)$, e $-c_A \sin \omega t + c_B \cos \omega t = m \cos(\omega t + \varphi)$.

□

c_{kA} e c_{kB} dipendono da x_0 e sono numeri qualsiasi: non si può porre direttamente $c_{kA} = \sin \varphi_k$ e $c_{kB} = \cos \varphi_k$, perché la somma dei loro quadrati non è 1. Per questo si raccoglie m_k .

Definizione – Modi aperiodici e pseudoperiodici

- Il modo di un autovalore reale, $c_i e^{\lambda_i t} u_i$, è un **modo naturale aperiodico**.
- Il modo di una coppia complessa, il termine della proposizione, è un **modo naturale pseudoperiodico**: è uno solo, con due vettori e due leggi temporali che non si separano.

Senza il fattore $e^{\alpha_k t}$ il modo sarebbe periodico, di periodo $2\pi/\omega_k$; con $\alpha_k \neq 0$ oscilla con lo stesso ritmo ma non torna nelle stesse condizioni, da cui il nome.

Lungo u_{kA} la legge $m e^{\alpha t} \sin(\omega t + \varphi)$ si legge in due modi (Figura 1):

- è un seno spostato di φ , che vale c_A in $t = 0$ e si annulla negli stessi istanti qualunque sia α , a distanza π/ω ;
- la sua ampiezza è $m e^{\alpha t}$: oscilla fra le curve $\pm m e^{\alpha t}$, che crescono se $\alpha > 0$ e si chiudono su zero se $\alpha < 0$.

Lungo u_{kB} la legge è la stessa con il coseno: le due sono in quadratura, una è nulla quando l'altra è al massimo. Insieme, nel piano di u_{kA} e u_{kB} , danno la spirale della Sezione 6. Anche da $x_0 = c_A u_A$ il moto lascia la retta di u_A , perché u_A non è un autovettore.

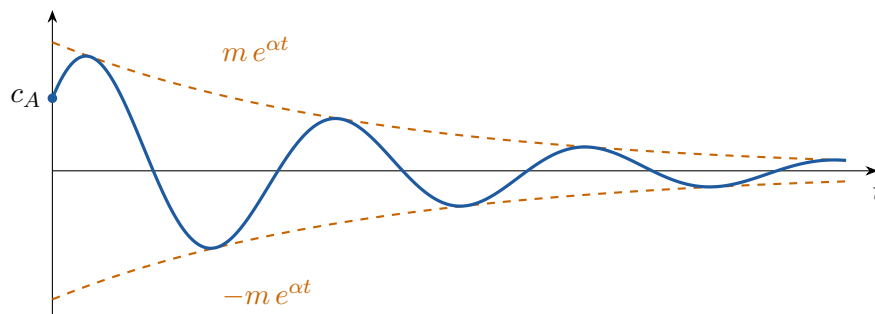


Figura 1: La legge $m e^{\alpha t} \sin(\omega t + \varphi)$ con $\alpha < 0$: gli zeri sono quelli del seno, l'ampiezza segue $\pm m e^{\alpha t}$.

Teorema – Evoluzione libera: modi aperiodici e pseudoperiodici

Nelle ipotesi della forma reale a blocchi, con $t_0 = 0$:

$$x_L(t) = \sum_{i=1}^{\mu} c_i e^{\lambda_i t} u_i + \sum_{k=1}^{\nu} m_k e^{\alpha_k t} [\sin(\omega_k t + \varphi_k) u_{kA} + \cos(\omega_k t + \varphi_k) u_{kB}]$$

con μ modi aperiodici e ν pseudoperiodici, e $\mu + 2\nu = n$.

Dimostrazione

È la somma della Sezione 7 applicata a x_0 : ogni autovalore reale dà $e^{\lambda_i t} u_i (v_i x_0) = c_i e^{\lambda_i t} u_i$, ogni coppia il termine della proposizione. $\square$

9 Osservabilità ed eccitabilità di un modo pseudoperiodico

Definizione – Osservabilità ed eccitabilità di una coppia

Il modo pseudoperiodico della coppia k è

- **non osservabile** se

$$C u_{kA} = 0 \quad \text{e} \quad C u_{kB} = 0,$$

osservabile altrimenti;

- **non eccitabile** se

$$v_{kA} B = 0 \quad \text{e} \quad v_{kB} B = 0,$$

eccitabile altrimenti.

Basta che uno dei due prodotti sia non nullo perché il modo si veda. Con l'autovettore complesso la condizione è la stessa del Capitolo 4: $C u = C u_A + i C u_B$ è nullo se e solo se lo sono $C u_A$ e $C u_B$, perché C è reale.

Proposizione – Il modo pseudoperiodico in Ψ , H e W

Le leggi $e^{\alpha_k t} \cos \omega_k t$ ed $e^{\alpha_k t} \sin \omega_k t$:

1. mancano da $\Psi(t) = C e^{At}$ se e solo se il modo è non osservabile;
2. mancano da $H(t) = e^{At} B$ se e solo se il modo è non eccitabile;
3. compaiono in $W(t) = D \delta(t)$ se e solo se il modo è eccitabile e osservabile.

Dimostrazione

Con $C_k := (Cu_A \ Cu_B)$, B_k la matrice di righe v_AB e v_BB , V_k quella di righe v_A e v_B , $U_k := (u_A \ u_B)$ ed $R(t)$ la matrice di rotazione del blocco, i termini della coppia sono

$$e^{\alpha t} C_k R(t) V_k \text{ in } \Psi, \quad e^{\alpha t} U_k R(t) B_k \text{ in } H, \quad e^{\alpha t} C_k R(t) B_k \text{ in } W.$$

1. $R(t)$ è invertibile e le righe di V_k sono indipendenti: il termine in Ψ è nullo per ogni t se e solo se $C_k = 0$.
2. Allo stesso modo, con le colonne di U_k indipendenti, il termine in H è nullo se e solo se $B_k = 0$.
3. L'elemento (i, j) del termine in W , con c la riga i di C_k e b la colonna j di B_k , è

$$e^{\alpha t} [(c_1 b_1 + c_2 b_2) \cos \omega t + (c_1 b_2 - c_2 b_1) \sin \omega t].$$

È nullo per ogni t se c e b sono insieme ortogonali e paralleli, cioè se uno dei due è nullo. Se qualche riga di C_k è non nulla, devono annullarsi tutte le colonne di B_k : il termine manca se e solo se $C_k = 0$ o $B_k = 0$.

□

10 Dall'equazione differenziale allo stato

Proposizione – Stato di un'equazione di ordine n

Per un'equazione differenziale di ordine n nell'incognita p , con ingresso u , si sceglie come stato

$$x = \begin{pmatrix} p \\ \dot{p} \\ \vdots \\ p^{(n-1)} \end{pmatrix} :$$

- ogni componente ha per derivata la successiva, $\dot{x}_i = x_{i+1}$ per $i < n$;
- $\dot{x}_n = p^{(n)}$ si ricava dall'equazione.

Se l'equazione è una combinazione lineare di $p, \dots, p^{(n)}$ e u a coefficienti costanti, il sistema è lineare e stazionario, $\dot{x} = Ax + Bu$, e i coefficienti formano A e B .

La derivata $p^{(n)}$ non serve come componente: noto lo stato, la dà l'equazione. Per una massa, posizione e velocità bastano, e l'accelerazione segue dalla somma delle forze (Esercizio 4).

Riepilogo

- **Molteplicità:** forma spettrale se $g_i = n - \text{rk}(A - \lambda_i I) = r_i$ per ogni i .
- **Matrici residue:** $e^{At} = \sum_i e^{\lambda_i t} R_i$, $\text{rk } R_i = r_i$, $\text{Im } R_i = E_i$.
- **Autospazio:** da $x_0 \in E_i$, $x(t) = e^{\lambda_i(t-t_0)} x_0$.
- **Osservabilità ed eccitabilità:** non osservabile se $CU_i = 0$ (coppia: $Cu_A = Cu_B = 0$), non eccitabile se $V_i B = 0$ (coppia: $v_A B = v_B B = 0$).
- **In W :** coefficiente $(CU_i)(V_i B)$, anche nullo con il modo eccitabile e osservabile.
- **Coppia complessa:** $Au_A = \alpha u_A - \omega u_B$, $Au_B = \omega u_A + \alpha u_B$.
- **Blocco reale:** $e^{Jt} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix}$; $e^{At} = T^{-1} e^{TAT^{-1}t} T$.
- **Modo pseudoperiodico:** $m e^{\alpha t} [\sin(\omega t + \varphi) u_A + \cos(\omega t + \varphi) u_B]$, con $c_A = m \sin \varphi$, $c_B = m \cos \varphi$.

11 Esercizi

Esercizio 1 – Molteplicità lette nell'esponenziale

Una matrice A di 3×3 ha tre autovettori indipendenti e

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ e^{2t} - e^t & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

1. Trova gli autovalori di A e le loro molteplicità.
2. Trova gli autospazi.
3. Ricava A .

Soluzione a pagina 18 →

Esercizio 2 – La forma esplicita nelle nuove coordinate

Con il cambio di coordinate $z = Tx$ del Capitolo 4:

1. scrivi le matrici $\tilde{\Phi}$, $\tilde{H}$, $\tilde{\Psi}$, $\tilde{W}$ della forma esplicita nelle coordinate z , in funzione di Φ , H , Ψ , W e T ;
2. verifica il risultato con $\tilde{A} = TAT^{-1}$, $\tilde{B} = TB$, $\tilde{C} = CT^{-1}$;
3. che cosa diventa $\tilde{\Phi}$ se T è la matrice della forma reale a blocchi?

Soluzione a pagina 18 →

Esercizio 3 – Forma reale di una coppia complessa

Sia

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Trova gli autovalori e, per quello con parte immaginaria positiva, un autovettore u con le sue parti u_A e u_B .
2. Scrivi T , la forma reale TAT^{-1} ed e^{At} .
3. Calcola l'evoluzione libera con $t_0 = 0$ da

$$x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e descrivi la traiettoria.

Soluzione a pagina 19 →

Esercizio 4 – Massa, molla e smorzatore

Una massa M è collegata a una molla di costante k e a uno smorzatore di coefficiente b ; l'ingresso è la forza F , l'uscita la posizione p , misurata dalla posizione di riposo della molla:

$$M \ddot{p} = F - b \dot{p} - k p.$$

1. Scrivi una rappresentazione con lo stato.
2. Con $M = 1$ e $k = 1$, descrivi i modi naturali al variare di $b > 0$, escluso $b = 2$.

Soluzione a pagina 20 →

Esercizio 5 – Appello del 12/06/2026, Canale 1, Prof. Paolo Di Giamberardino, esercizio 2, adattato

Sia dato il sistema

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} u, \quad y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x + 2u.$$

1. Determinarne i modi naturali e studiarne eccitabilità ed osservabilità.
2. Calcolarne la risposta impulsiva (in uscita).

Soluzione a pagina 20 →

Esercizio 6 – Appello del 12/06/2026, Canale 1, Prof. Paolo Di Giamberardino, esercizio 1, adattato

Una bilancia meccanica si può schematizzare con un piatto appoggiato a uno smorzatore a e a una molla k , dove il peso viene misurato a partire dallo spostamento h prodotto. Si ricorda che l'equazione dinamica, quando si pone una massa M sulla bilancia nell'istante $t = t_0$, può essere scritta, per $t \geq t_0$, come

$$M\ddot{h}(t) = -k h(t) - a \dot{h}(t) - u(t)$$

con $h(t_0) = 0$, $\dot{h}(t_0) = 0$ e $u(t) = Mg \delta_{-1}(t - t_0)$.

- a. Fornire una rappresentazione con lo spazio di stato;
- d. posto $k = 100 \text{ [N m}^{-1}\text{]}$ e supponendo di pesare solo masse con $M \leq 100 \text{ kg}$, determinare i valori di $a \text{ [N s m}^{-1}\text{]}$ per i quali la bilancia, quando viene posto il peso, non presenta andamento oscillatorio.

Soluzione a pagina 21 →

12 Soluzioni

Soluzione dell'Esercizio 1 – Molteplicità lette nell'esponenziale

1. **Residui.** Si raccolgono le due leggi:

$$e^{At} = e^t \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{R_1} + e^{2t} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{R_2}.$$

Le leggi sono due su $n = 3$: un autovalore è doppio. R_1 ha le prime due righe indipendenti e la terza opposta alla prima: $\text{rk } R_1 = 2$; $\text{rk } R_2 = 1$. Quindi $\lambda = 1$ con $r = g = 2$ e $\lambda = 2$ semplice. Infatti $R_1 + R_2 = I$.

2. **Autospazi.** Sono le immagini delle R_i , generate dalle loro colonne:

$$E_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad E_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

3. **La matrice.** A è la derivata di e^{At} in $t = 0$ (Capitolo 3):

$$A = R_1 + 2R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Verifica: $A - I$ ha la sola riga non nulla $(1 \ 0 \ 1)$, che annulla i due vettori di E_1 ; $A - 2I$ ha la terza colonna nulla.

[← Torna all'Esercizio 1, pagina 15](#)

Soluzione dell'Esercizio 2 – La forma esplicita nelle nuove coordinate

1. **Dalla forma esplicita.** Si moltiplica per T lo stato e si scrive $x_0 = T^{-1}z_0$:

$$z(t) = T\Phi(t - t_0)T^{-1}z_0 + \int_{t_0}^t TH(t - \tau)u(\tau) d\tau,$$

$$y(t) = \Psi(t - t_0)T^{-1}z_0 + \int_{t_0}^t W(t - \tau)u(\tau) d\tau.$$

Quindi

$$\tilde{\Phi} = T\Phi T^{-1}, \quad \tilde{H} = TH, \quad \tilde{\Psi} = \Psi T^{-1}, \quad \tilde{W} = W.$$

2. **Verifica.** $(TAT^{-1})^k = TA^kT^{-1}$, perché i $T^{-1}T$ interni valgono I ; nella serie dell'esponenziale $e^{\tilde{A}t} = Te^{At}T^{-1}$. Allora $\tilde{H} = e^{\tilde{A}t}\tilde{B} = Te^{At}T^{-1}TB = TH$, $\tilde{\Psi} = \tilde{C}e^{\tilde{A}t} = CT^{-1}Te^{At}T^{-1} = \Psi T^{-1}$ e $\tilde{W} = \tilde{C}\tilde{H} + D\delta = CH + D\delta = W$.

3. **Forma reale.** $\tilde{\Phi}(t) = e^{TAT^{-1}t}$ è diagonale a blocchi, con $e^{\lambda_i t}$ e i blocchi $e^{J_k t}$: ogni coordinata di un autovalore reale, e ogni coppia di coordinate di una coppia complessa, evolve da sola con il suo modo naturale. W non cambia: il legame fra ingresso e uscita non dipende dalle coordinate dello stato.

[← Torna all'Esercizio 2, pagina 15](#)

Soluzione dell'Esercizio 3 – Forma reale di una coppia complessa

1. **Autovalori.** $\det(A - \lambda I) = \lambda(\lambda + 2) + 2 = \lambda^2 + 2\lambda + 2$: $\lambda = -1 \pm i$, con $\alpha = -1$, $\omega = 1$. Per $\lambda = -1 + i$ la prima riga di $A - \lambda I$ dà $(1 - i)a + b = 0$, cioè $b = (-1 + i)a$; con $a = 1$:

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 + i \end{pmatrix}, \quad u_A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Controllo: $Au_A = -u_A - u_B$ e $Au_B = u_A - u_B$, come chiedono le due equazioni reali.

2. **Forma reale.**

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} u_A & u_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = J.$$

Quindi

$$e^{At} = T^{-1} e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} T = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t + \sin t & \sin t \\ -2 \sin t & \cos t - \sin t \end{pmatrix},$$

che in $t = 0$ dà I e ha derivata A in $t = 0$.

3. **Evoluzione libera.** Con la prima colonna di e^{At} :

$$x(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ -2 \sin t \end{pmatrix}.$$

Nelle coordinate $z = Tx$ si parte da $z_0 = Tx_0$, con componenti 1 e 1, cioè $x_0 = u_A + u_B$. Le coordinate ruotano di un angolo t , da u_B verso u_A , e l'ampiezza si riduce come e^{-t} : lo stato va verso l'origine lungo una spirale, con un giro ogni 2π .

[← Torna all'Esercizio 3, pagina 16](#)

Soluzione dell'Esercizio 4 – Massa, molla e smorzatore

1. **Stato.** L'equazione è del secondo ordine: $x_1 = p$, $x_2 = \dot{p}$. Allora $\dot{x}_1 = x_2$ e, dall'equazione, $\dot{x}_2 = -\frac{k}{M}x_1 - \frac{b}{M}x_2 + \frac{1}{M}F$. I coefficienti sono costanti e l'equazione è lineare:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{b}{M} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{pmatrix} F, \quad p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x,$$

con $D = 0$: la forza non agisce direttamente sulla posizione.

2. **Autovalori.** Con $M = k = 1$, $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + b\lambda + 1$ e

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4}}{2}.$$

- $b > 2$: due autovalori reali distinti, entrambi negativi perché $\sqrt{b^2 - 4} < b$. Due modi **aperiodici** convergenti: la massa torna a riposo senza oscillare.
- $0 < b < 2$: una coppia con $\alpha = -\frac{b}{2} < 0$ e $\omega = \frac{\sqrt{4-b^2}}{2}$. Un modo **pseudoperiodico** convergente: la massa oscilla, con ampiezza che si riduce come $e^{-bt/2}$.

Con $b = 2$ l'autovalore -1 è doppio e $\text{rk}(A + I) = 1$: $g = 1 < r = 2$, caso escluso dalle ipotesi del capitolo. In ogni caso con $b > 0$ la massa torna a riposo: basta conoscere gli autovalori.

[← Torna all'Esercizio 4, pagina 16](#)

Soluzione dell'Esercizio 5 – Appello del 12/06/2026, Canale 1, Prof. Paolo Di Giamberardino, esercizio 2, adattato

1. **Autovalori.** Sviluppando sulla seconda riga, $\det(A - \lambda I) = (-1 - \lambda)(\lambda^2 - 1) = -(\lambda + 1)^2(\lambda - 1)$: $\lambda_1 = -1$ con $r_1 = 2$ e $\lambda_2 = 1$ semplice.

Autospazi. $A + I$ ha due righe uguali a $(1 \ 1 \ 1)$ e una nulla: $\text{rk}(A + I) = 1$, $g_1 = 3 - 1 = 2 = r_1$, e A ha tre autovettori indipendenti. E_1 è il piano $a + b + c = 0$ (componenti a, b, c); per $\lambda_2 = 1$, $(A - I)u = 0$ dà $b = 0$ e $a = c$. Con

$$u_{11} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_{12} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_{21} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad U^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Modi naturali. Due modi con legge $e^{-(t-t_0)}$, lungo u_{11} e u_{12} , che insieme sono l'evoluzione nel piano invariante E_1 ; un modo e^{t-t_0} lungo u_{21} , che cresce.

Eccitabilità.

$$V_1 B = \begin{pmatrix} v_{11} B \\ v_{12} B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0 :$$

il modo di -1 è eccitabile. $v_{21}B = \frac{1}{2}(1-1) = 0$: il modo di 1 è non eccitabile.
Osservabilità. $CU_1 = (Cu_{11} \ Cu_{12}) = (-1 \ 0) \neq 0$: il modo di -1 è osservabile. $Cu_{21} = 0$: il modo di 1 è non osservabile.

Nella base scelta u_{11} si vede in uscita ma non è eccitato, u_{12} è eccitato ma non si vede: sono letture della base, mentre la definizione guarda tutto E_1 .

2. **Risposta impulsiva.** I coefficienti di W sono

$$(CU_1)(V_1B) = (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0, \quad (Cu_{21})(v_{21}B) = 0,$$

quindi

$$W(t) = C e^{At} B + D \delta(t) = 2 \delta(t).$$

Si vede anche direttamente: $AB = -B$, cioè $B = u_{12} \in E_1$, quindi $H(t) = e^{-t}B$, e $CB = 0$. Il modo di -1 è eccitabile e osservabile, ma non compare in W : in uscita resta solo il legame diretto.

[← Torna all'Esercizio 5, pagina 17](#)

Soluzione dell'Esercizio 6 – Appello del 12/06/2026, Canale 1, Prof. Paolo Di Giamberardino, esercizio 1, adattato

a. **Stato.** Con $x_1 = h$ e $x_2 = \dot{h}$: $\dot{x}_1 = x_2$ e $\dot{x}_2 = -\frac{k}{M}x_1 - \frac{a}{M}x_2 - \frac{1}{M}u$. Con uscita lo spostamento misurato, $y = h$:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{a}{M} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{M} \end{pmatrix} u, \quad y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x, \quad D = 0.$$

d. **Oscillazioni.** Le oscillazioni vengono da un modo pseudoperiodico, cioè da una coppia di autovalori complessi. Gli autovalori risolvono

$$M \det(A - \lambda I) = M\lambda^2 + a\lambda + k = 0,$$

e sono reali se e solo se $a^2 - 4Mk \geq 0$. Deve valere per ogni $M \leq 100$, quindi per il caso peggiore $M = 100$:

$$a^2 \geq 4 \cdot 100 \cdot 100 \iff a \geq 200 \text{ N s m}^{-1}.$$

Con $a > 200$ gli autovalori sono reali, distinti e negativi per ogni massa: due modi aperiodici convergenti. Con $a = 200$ e $M = 100$ l'autovalore -1 è doppio, reale: non c'è una coppia complessa.

[← Torna all'Esercizio 6, pagina 17](#)