

Appunti di Sistemi Dinamici

Canale 1 · Prof. Paolo Di Giamberardino

Capitolo 6: Rappresentazione alle differenze e modi a tempo discreto

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dalle lezioni in aula e dal materiale del corso

Argomenti: Equazioni alle differenze · Dalla forma esplicita alla forma alle differenze
Dalla forma alle differenze alla forma esplicita · Potenze di A
Modi aperiodici e alternanti · Coppie complesse in forma polare
Osservabilità ed eccitabilità: la stessa geometria

Indice

1	La rappresentazione alle differenze	1
2	Dalla forma esplicita alla forma alle differenze	1
3	Dalla forma alle differenze alla forma esplicita	2
4	Le potenze di A	3
5	I modi aperiodici a tempo discreto	4
6	Le coppie complesse: la forma polare	4
7	Osservabilità ed eccitabilità: la stessa geometria	7
8	Esercizi	8
9	Soluzioni	9

1 La rappresentazione alle differenze

Definizione – Rappresentazione alle differenze

La **forma implicita** di un sistema lineare stazionario a tempo discreto, o **rappresentazione alle differenze**, è

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad x(t_0) = x_0$$

con t intero e A, B, C, D costanti, delle dimensioni del Capitolo 3.

Al posto della derivata c'è lo stato al passo successivo: la prima equazione dice come cambia lo stato da un istante al seguente, una **differenza** invece di una variazione istantanea. È la descrizione naturale di un sistema che evolve a passi.

Come a tempo continuo (Capitolo 3), la forma esplicita del Capitolo 2 dà $x(t)$ da x_0 e da tutta la sequenza degli ingressi; la forma alle differenze dà solo il passo successivo. Le due sezioni seguenti passano dall'una all'altra.

2 Dalla forma esplicita alla forma alle differenze

Teorema – Dalla forma esplicita alla forma alle differenze

Dalla rappresentazione esplicita a tempo discreto del Capitolo 2,

$$x(t) = \Phi(t - t_0)x_0 + \sum_{\tau=t_0}^{t-1} H(t - \tau)u(\tau), \quad y(t) = Cx(t) + Du(t),$$

si ottiene

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t), \quad A := \Phi(1), \quad B := H(1)$$

Dimostrazione

La forma esplicita vale per ogni istante iniziale. Con istante iniziale t e osservazione in $t+1$, un passo solo:

1. $\Phi((t+1) - t) = \Phi(1)$;
2. la somma va da $\tau = t$ a $\tau = (t+1) - 1 = t$: ha il solo termine $H((t+1) - t)u(t) = H(1)u(t)$.

Quindi $x(t+1) = \Phi(1)x(t) + H(1)u(t)$. L'uscita è già istantanea e resta com'è. $\square$

A tempo discreto il passaggio è più semplice che a tempo continuo: non serve derivare, né chiedere a Φ di essere derivabile. Basta guardare un passo.

3 Dalla forma alle differenze alla forma esplicita

Teorema – Soluzione della forma alle differenze

Per $t \geq t_0$:

$$x(t) = A^{t-t_0}x_0 + \sum_{\tau=t_0}^{t-1} A^{t-1-\tau} B u(\tau)$$

con la somma vuota, cioè nulla, per $t = t_0$.

Dimostrazione

1. **Un passo alla volta.**

$$x(t_0 + 1) = A x_0 + B u(t_0),$$

$$x(t_0 + 2) = A x(t_0 + 1) + B u(t_0 + 1) = A^2 x_0 + A B u(t_0) + B u(t_0 + 1),$$

$$x(t_0 + 3) = A^3 x_0 + A^2 B u(t_0) + A B u(t_0 + 1) + B u(t_0 + 2).$$

2. **La regola.** Dopo N passi x_0 è moltiplicato per A^N ; l'ingresso $u(\tau)$, con τ da t_0 a $t_0 + N - 1$, per A elevata al numero di passi che restano dopo il suo, $t_0 + N - 1 - \tau$, e per B .

3. **Induzione.** Se la formula vale in t , allora $x(t + 1) = A x(t) + B u(t)$ dà $A^{t+1-t_0}x_0$ più la somma fino a $t - 1$ con un fattore A in più, più $B u(t)$, che è il termine $\tau = t$.

4. **Nomi.** Con $N = t - t_0$ si ottiene la formula.

□

Proposizione – Le matrici della forma esplicita

Confrontando con la forma esplicita del Capitolo 2, per $k \geq 1$:

$$\begin{aligned} \Phi(k) &= A^k, & H(k) &= A^{k-1}B, \\ \Psi(k) &= C A^k, & W(k) &= C A^{k-1}B, & W(0) &= D \end{aligned}$$

e $\Phi(0) = I$.

Le due forme si equivalgono: dalla esplicita si legge la forma alle differenze guardando un passo, e iterando la forma alle differenze si ritrova la esplicita.

Osservazione – $H(0)$ non serve

$H(k) = A^{k-1}B$ vale solo per $k \geq 1$: in $k = 0$ darebbe $A^{-1}B$, che può non esistere. Non è un problema, perché $H(0)$ non compare mai: nella somma $\tau \leq t - 1$, quindi $t - \tau \geq 1$. L'ingresso applicato in τ entra nello stato solo al passo dopo, e infatti $B = H(1)$, mentre a tempo continuo (Capitolo 3) $B = H(0)$.

4 Le potenze di A

Proposizione – Potenza di una matrice diagonalizzabile

Se $A = U\Lambda U^{-1}$, con U di colonne u_i e U^{-1} di righe v_i :

$$A^t = U\Lambda^t U^{-1} = \sum_{i=1}^n \lambda_i^t u_i v_i$$

con Λ^t la diagonale delle potenze λ_i^t . Vale anche con autovalori ripetuti, se $g_i = r_i$ (Capitolo 5).

Dimostrazione

Nel prodotto $(U\Lambda U^{-1})(U\Lambda U^{-1}) \dots$ i fattori $U^{-1}U$ interni danno I , e la potenza di una matrice diagonale si fa elemento per elemento. Il prodotto per righe e colonne dà la somma. $\square$

Con $t_0 = 0$ e $c_i := v_i x_0$, l'evoluzione libera è

$$x_L(t) = A^t x_0 = \sum_{i=1}^n c_i \lambda_i^t u_i$$

la stessa struttura del Capitolo 3, con la potenza λ_i^t al posto dell'esponenziale: ogni termine è un **modo naturale**, un autovettore con la sua legge temporale, definita solo negli istanti interi.

5 I modi aperiodici a tempo discreto

Definizione – Modi aperiodici e alternanti

Il modo $c_i \lambda_i^t u_i$ di un autovalore reale è un **modo aperiodico**. Se $\lambda_i < 0$ è anche **alternante**: λ_i^t cambia segno a ogni passo e lo stato salta da una parte all'altra dell'origine lungo u_i .

Il modulo $|\lambda|^t$ decide l'ampiezza, il segno decide se alterna (Tabella e Figura 1):

autovalore	legge λ^t	modo
$\lambda > 1$	cresce	divergente
$\lambda = 1$	costante	limitato
$0 < \lambda < 1$	decresce a zero	convergente
$\lambda = 0$	nulla per ogni $t \geq 1$	si annulla dopo un passo
$-1 < \lambda < 0$	tende a zero cambiando segno	alternante convergente
$\lambda = -1$	vale ± 1	alternante limitato
$\lambda < -1$	cresce in modulo cambiando segno	alternante divergente

A tempo continuo $e^{\lambda t} > 0$ e non si annulla mai: i modi alternanti e i modi che si annullano in un numero finito di passi esistono solo a tempo discreto. Quando conta una sola proprietà si usa solo quell'aggettivo, per esempio *divergente*.

La parte geometrica non cambia rispetto al tempo continuo: gli autovettori, le righe v_i e i sottospazi invarianti sono gli stessi, e lungo ogni u_i si svolge un modo.

6 Le coppie complesse: la forma polare

Per una coppia $\lambda = \alpha + i\omega$, $\bar{\lambda}$, il cambio di base del Capitolo 5 porta al blocco $J = M\Lambda_c M^{-1}$, con Λ_c la diagonale di λ e $\bar{\lambda}$. Per le potenze la forma $\alpha + i\omega$ non aiuta: $(\alpha + i\omega)^t$ si sviluppa con il binomio. Serve la forma polare.

Definizione – Forma polare dell'autovalore

$$\lambda = \alpha + i\omega = \rho e^{i\theta}, \quad \rho = |\lambda| = \sqrt{\alpha^2 + \omega^2}, \quad \alpha = \rho \cos \theta, \quad \omega = \rho \sin \theta,$$
 con $0 < \theta < \pi$ per l'autovalore con $\omega > 0$. Allora $\lambda^t = \rho^t e^{i\theta t}$.

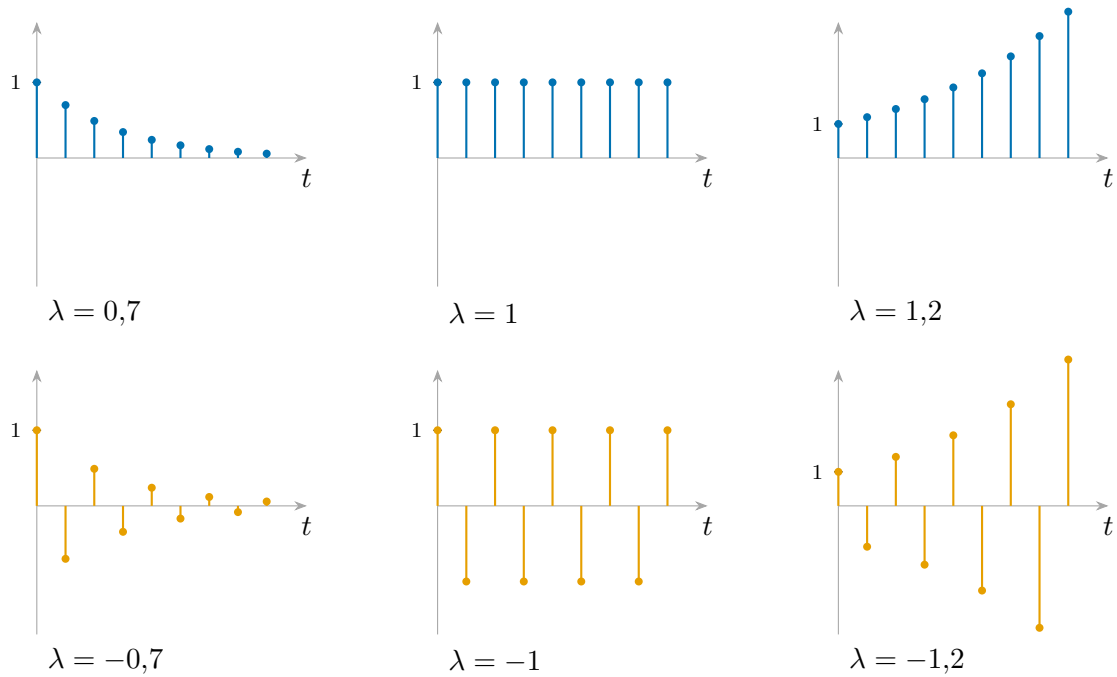


Figura 1: Le leggi λ^t : in alto aperiodici con $\lambda > 0$, in basso alternanti. Nei pannelli di destra la scala verticale è ridotta.

Proposizione – Potenza del blocco reale

$$J^t = \rho^t \begin{pmatrix} \cos \theta t & \sin \theta t \\ -\sin \theta t & \cos \theta t \end{pmatrix}$$

Dimostrazione

1. **Diagonale complessa.** $J^t = M \Lambda_c^t M^{-1}$, con $\lambda^t = \rho^t e^{i\theta t}$ e $\bar{\lambda}^t = \rho^t e^{-i\theta t}$.
2. **Prodotto.** Come per l'esponenziale del blocco (Capitolo 5), con ρ^t al posto di $e^{\alpha t}$:

$$J^t = \frac{\rho^t}{2} \begin{pmatrix} e^{i\theta t} + e^{-i\theta t} & -i(e^{i\theta t} - e^{-i\theta t}) \\ i(e^{i\theta t} - e^{-i\theta t}) & e^{i\theta t} + e^{-i\theta t} \end{pmatrix}.$$

3. **Eulero.** La somma dà $2 \cos \theta t$, la differenza $2i \sin \theta t$.

□

La forma è quella di e^{Jt} nel Capitolo 5, con due differenze:

- davanti c'è il **modulo** ρ^t , non $e^{\alpha t}$: decide $|\lambda|$, non la parte reale;
- nelle funzioni trigonometriche c'è la **fase** θ , non ω : e θ e $\theta + 2\pi$ danno le stesse leggi.

Proposizione – Modo pseudoperiodico a tempo discreto

Con $c_A = v_A x_0 = m \sin \varphi$ e $c_B = v_B x_0 = m \cos \varphi$, come nel Capitolo 5, la coppia contribuisce all'evoluzione libera con

$$m \rho^t [\sin(\theta t + \varphi) u_A + \cos(\theta t + \varphi) u_B]$$

un **modo pseudoperiodico**: diverge se $\rho > 1$, resta limitato se $\rho = 1$, converge a zero se $\rho < 1$.

Dimostrazione

È la dimostrazione del Capitolo 5 con J^t al posto di e^{Jt} : ρ^t al posto di $e^{\alpha t}$ e θt al posto di ωt . $\square$

Un modo pseudoperiodico non è mai alternante: $\rho > 0$, quindi ρ^t non cambia segno, e l'oscillazione viene solo dal seno e dal coseno. Nel piano di u_A e u_B lo stato si muove a punti lungo una spirale, che si stringe se $\rho < 1$ e si allarga se $\rho > 1$ (Figura 2).

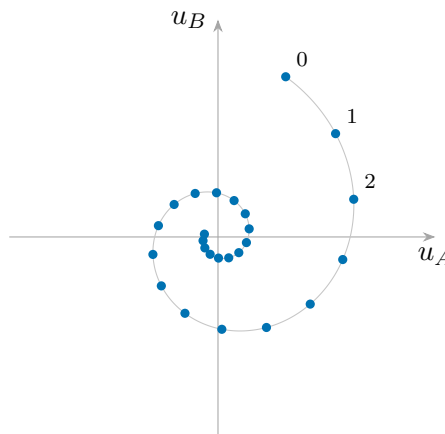


Figura 2: Un modo pseudoperiodico convergente ($\rho < 1$) nel piano della coppia: lo stato salta di punto in punto lungo una spirale; i numeri sono gli istanti t .

Teorema – Evoluzione libera a tempo discreto

Nelle ipotesi della forma reale a blocchi del Capitolo 5, con $t_0 = 0$:

$$x_L(t) = \sum_{i=1}^{\mu} c_i \lambda_i^t u_i + \sum_{k=1}^{\nu} m_k \rho_k^t [\sin(\theta_k t + \varphi_k) u_{kA} + \cos(\theta_k t + \varphi_k) u_{kB}]$$

con μ modi aperiodici, eventualmente alternanti, e ν pseudoperiodici.

7 Osservabilità ed eccitabilità: la stessa geometria

Proposizione – Le condizioni non dipendono dal tempo

A tempo discreto le condizioni di osservabilità ed eccitabilità dei modi sono quelle del tempo continuo (Capitoli 4 e 5):

- il modo di λ_i è non osservabile se $C U_i = 0$, non eccitabile se $V_i B = 0$;
- il modo pseudoperiodico è non osservabile se $C u_A = C u_B = 0$, non eccitabile se $v_A B = v_B B = 0$.

Dimostrazione

In $\Psi(k) = CA^k$ e in $H(k) = A^{k-1}B$ le leggi temporali, λ_i^k o ρ^k per seno e coseno, stanno fra Cu e v , o fra u e vB , come $e^{\lambda_i t}$ o $e^{\alpha t}$ a tempo continuo: un modo manca se e solo se si annullano gli stessi prodotti. I conti sono quelli dei Capitoli 4 e 5. $\square$

Autovalori, autovettori, B e C sono la parte geometrica del sistema: tutto ciò che non coinvolge il tempo si studia una volta sola e vale per entrambi i casi. Cambiano solo le leggi temporali: esponenziali a tempo continuo, potenze a tempo discreto.

Riepilogo

- **Forma alle differenze:** $x(t+1) = Ax(t) + Bu(t)$, $y = Cx + Du$.
- **Da esplicita:** $A = \Phi(1)$, $B = H(1)$, guardando un passo.
- **Soluzione:** $x(t) = A^{t-t_0}x_0 + \sum_{\tau=t_0}^{t-1} A^{t-1-\tau} Bu(\tau)$.
- **Matrici:** $\Phi(k) = A^k$, $H(k) = A^{k-1}B$ per $k \geq 1$; $W(0) = D$, $W(k) = CA^{k-1}B$.
- **Potenze:** $A^t = \sum_i \lambda_i^t u_i v_i$, $x_L(t) = \sum_i c_i \lambda_i^t u_i$.
- **Modi reali:** aperiodici; alternanti se $\lambda < 0$; convergono se $|\lambda| < 1$, divergono se $|\lambda| > 1$.
- **Coppie:** $\lambda = \rho e^{i\theta}$, $J^t = \rho^t \begin{pmatrix} \cos \theta t & \sin \theta t \\ -\sin \theta t & \cos \theta t \end{pmatrix}$; mai alternanti.
- **Geometria:** osservabilità ed eccitabilità come a tempo continuo.

8 Esercizi

Esercizio 1 – Esonero del 14/11/2025 (fila A), Canale 1, Prof. Paolo Di Giamberardino, esercizio 2, adattato

Dato il sistema a tempo discreto descritto dalle equazioni

$$x(t+1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & -1 \end{pmatrix} x(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t) + Du(t),$$

determinare i valori di $a \in \mathbb{R}$, $a \neq -\frac{1}{4}$, se esistono, tali che il sistema presenti almeno un modo naturale alternante.

Soluzione a pagina 9 →

9 Soluzioni

Soluzione dell'Esercizio 1 – Esonero del 14/11/2025 (fila A), Canale 1, Prof. Paolo Di Giamberardino, esercizio 2, adattato

Autovalori. $\det(A - \lambda I) = -\lambda(-1 - \lambda) - a = \lambda^2 + \lambda - a$, quindi

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \mp \sqrt{1+4a}}{2}.$$

Un modo alternante viene da un autovalore reale negativo; le coppie complesse danno modi pseudoperiodici, mai alternanti.

Caso $a > -\frac{1}{4}$. Autovalori reali e distinti. Sempre

$$\lambda_1 = \frac{-1 - \sqrt{1+4a}}{2} < 0 :$$

c'è almeno un modo alternante. Inoltre $\lambda_2 = \frac{-1+\sqrt{1+4a}}{2}$ è negativo per $-\frac{1}{4} < a < 0$ (due modi alternanti), nullo per $a = 0$, positivo per $a > 0$ (un modo aperiodico non alternante).

Caso $a < -\frac{1}{4}$. Una coppia complessa con $\rho = \sqrt{-a}$ (il prodotto degli autovalori è $-a$): un modo pseudoperiodico, nessun modo alternante.

Risposta. Il sistema ha almeno un modo alternante per ogni $a > -\frac{1}{4}$.

[← Torna all'Esercizio 1, pagina 8](#)