

Appunti di Sistemi Dinamici

Canale 1 · Prof. Paolo Di Giamberardino

Capitolo 9: Antitrasformazione, poli e residui

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dalle lezioni in aula e dal materiale del corso

Argomenti: Tornare nel tempo · Fratti semplici e residui · Poli multipli
Poli complessi coniugati · $\Phi(s)$ e polinomio minimo · Poli e modi

Indice

1	Tornare nel tempo	1
2	Fratti semplici e residui	2
3	Poli multipli	3
4	Poli complessi coniugati	4
5	$\Phi(s)$ e polinomio minimo	5
6	Poli e modi	8
7	Esercizi	10
8	Soluzioni	12

1 Tornare nel tempo

Definizione – Funzione razionale strettamente propria

$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$, con N e D polinomi, è **razionale strettamente propria** se il grado del numeratore è minore di quello del denominatore.

Le trasformate del Capitolo 8, tranne quella dell'impulso, sono razionali strettamente proprie, e lo sono le loro somme e i loro prodotti. Quindi lo sono le trasformate delle leggi dei modi naturali e degli ingressi usuali (costanti, rampe, sinusoidi), e anche

$$X(s) = \Phi(s) x_0 + H(s) U(s), \quad Y(s) - D U(s) = \Psi(s) x_0 + C H(s) U(s).$$

Nota – Il metodo

Per tornare da $F(s)$ a $f(t)$ non si calcola un integrale:

1. si scompone $F(s)$ in una somma di **fratti semplici**, che sono nella tabella del Capitolo 8;
2. si legge nella tabella la funzione del tempo di ogni fratto, con lo stesso coefficiente;
3. si moltiplica il risultato per $\delta_{-1}(t)$, perché è nullo prima di 0.

Il problema tipico è la risposta forzata in uscita a un ingresso dato, $Y_f(s) = W(s) U(s)$, che va riportata nel tempo, dove ha il significato della grandezza fisica. L'Esercizio 1 lo fa con $W(s) = \frac{1}{s+1}$ e $u(t) = \sin \omega t$.

2 Fratti semplici e residui

Teorema – Residui di poli semplici

Se $F(s)$ è razionale strettamente propria e il denominatore ha le radici distinte $s_1, \dots, s_n$:

1. F si scompone in modo unico come

$$F(s) = \frac{R_1}{s - s_1} + \dots + \frac{R_n}{s - s_n},$$

2. ogni coefficiente è

$$R_i = \lim_{s \rightarrow s_i} (s - s_i) F(s)$$

3. e l'antitrasformata è

$$f(t) = (R_1 e^{s_1 t} + \dots + R_n e^{s_n t}) \delta_{-1}(t)$$

Dimostrazione

1. **Numeratori costanti.** Ogni fratto ha denominatore di primo grado e deve essere strettamente proprio: se un fratto non lo fosse, nemmeno la somma lo sarebbe. Il suo numeratore è quindi una costante.
2. **Il limite.** Moltiplicando per $s - s_i$, il fratto i diventa R_i e gli altri diventano $R_j \frac{s - s_i}{s - s_j}$, che per $s \rightarrow s_i$ vanno a zero perché $s_i \neq s_j$. Resta R_i .
3. **Antitrasformata.** $\frac{1}{s - s_i}$ è la trasformata di $e^{s_i t}$ (Capitolo 8), e per la linearità i coefficienti restano gli stessi.

□

I coefficienti si possono trovare anche riscrivendo la somma con il denominatore comune e uguagliando i coefficienti dei due numeratori (principio d'identità dei polinomi), ma con n radici serve un sistema lineare di n equazioni. Con i limiti bastano n conti separati.

Esempio – Due poli reali

Per

$$F(s) = \frac{s}{s^2 + 3s + 2} = \frac{s}{(s+1)(s+2)} = \frac{R_1}{s+1} + \frac{R_2}{s+2}$$

i residui sono

$$R_1 = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{s}{s+2} = -1, \quad R_2 = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{s}{s+1} = 2,$$

quindi $f(t) = (2e^{-2t} - e^{-t}) \delta_{-1}(t)$. Con l'identità dei polinomi, $R_1(s+2) + R_2(s+1) = s$ dà $R_1 + R_2 = 1$ e $2R_1 + R_2 = 0$, con la stessa soluzione.

3 Poli multipli

Se s_1 è radice del denominatore con molteplicità r , il fratto $\frac{N_1(s)}{(s-s_1)^r}$ può avere a numeratore un polinomio di grado fino a $r-1$, e con i limiti non se ne separano i coefficienti. Riscrivendo $N_1(s)$ in potenze di $s-s_1$, ogni potenza semplifica il denominatore, e il fratto si spezza in r fratti con numeratore costante.

Teorema – Residui di un polo multiplo

Se s_1 ha molteplicità r :

1. nella scomposizione compaiono tutte le potenze di $s-s_1$, da r a 1:

$$F(s) = \frac{R_{11}}{(s-s_1)^r} + \frac{R_{12}}{(s-s_1)^{r-1}} + \cdots + \frac{R_{1r}}{s-s_1} + (\text{fratti degli altri poli}),$$

2. con $G(s) := (s-s_1)^r F(s)$, i coefficienti sono

$$R_{1j} = \frac{1}{(j-1)!} \lim_{s \rightarrow s_1} \frac{d^{j-1} G(s)}{ds^{j-1}}, \quad j = 1, \dots, r$$

3. e ogni fratto si antitrasforma con

$$\frac{1}{(s-s_1)^k} \longrightarrow \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{s_1 t} \delta_{-1}(t)$$

I poli semplici si trattano come nella Sezione 2.

Dimostrazione

1. Si moltiplica per la potenza più alta. In

$$G(s) = R_{11} + R_{12}(s - s_1) + \cdots + R_{1r}(s - s_1)^{r-1} + (s - s_1)^r \text{ (altri fratti)}$$

gli altri fratti non hanno s_1 come polo, quindi l'ultimo termine si annulla in s_1 con le sue prime $r - 1$ derivate.

2. Si deriva $j - 1$ volte. I termini di grado minore di $j - 1$ spariscono, il termine $R_{1j}(s - s_1)^{j-1}$ diventa $(j - 1)! R_{1j}$, e quelli di grado maggiore conservano un fattore $s - s_1$.3. Si fa il limite per $s \rightarrow s_1$: resta $(j - 1)! R_{1j}$.4. Antitrasformata. È la riga $e^{\lambda t} \frac{t^k}{k!}$ della traslazione in s (Capitolo 8), con $\lambda = s_1$ e $k - 1$ al posto di k .

□

Il primo coefficiente è un limite, ogni altro una derivata in più di G , che si è già calcolata per il precedente. Un polo multiplo dà potenze di t davanti all'esponenziale. L'Esercizio 2 applica la formula.

Esempio – Un polo triplo

Se la scomposizione dà

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)^3} + \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{3}{s+1} + \frac{2}{s+2},$$

ogni fratto si legge nella tabella con il suo coefficiente. Il primo dà $2 \frac{t^2}{2} e^{-t} = t^2 e^{-t}$, e

$$f(t) = ((t^2 + t - 3) e^{-t} + 2 e^{-2t}) \delta_{-1}(t).$$

4 Poli complessi coniugati

Se il denominatore ha coefficienti reali, le radici complesse vengono a coppie $\alpha \pm i\omega$, come per le trasformate di $e^{\alpha t} \sin \omega t$ ed $e^{\alpha t} \cos \omega t$, il cui denominatore è $(s - \alpha)^2 + \omega^2$. Nel campo complesso sono due poli semplici distinti, e i loro residui si calcolano con i limiti della Sezione 2.

Teorema – Una coppia di poli complessi

Sia F razionale strettamente propria a coefficienti reali, con poli semplici $\alpha \pm i\omega$, e sia $R_1 = R_a + iR_b$ il residuo di $\alpha + i\omega$.

1. Il residuo di $\alpha - i\omega$ è il coniugato $R_a - iR_b$.
2. I due fratti insieme sono

$$\frac{R_1}{s - \alpha - i\omega} + \frac{\overline{R_1}}{s - \alpha + i\omega} = \frac{2R_a(s - \alpha) - 2R_b\omega}{(s - \alpha)^2 + \omega^2}.$$

3. La loro antitrasformata è reale:

$$2e^{\alpha t}(R_a \cos \omega t - R_b \sin \omega t) \delta_{-1}(t)$$

Dimostrazione

1. **Coniugati.** Con coefficienti reali $F(\bar{s}) = \overline{F(s)}$, quindi il limite in $\alpha - i\omega$ è il coniugato di quello in $\alpha + i\omega$.

2. **Nel campo complesso.** I due fratti si antitrasformano come poli semplici:

$$(R_a + iR_b)e^{(\alpha + i\omega)t} + (R_a - iR_b)e^{(\alpha - i\omega)t} = e^{\alpha t} \left(R_a(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) + iR_b(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) \right),$$

e per Eulero le due parentesi sono $2 \cos \omega t$ e $2i \sin \omega t$, con $i \cdot 2i = -2$.

3. **Restando in s .** Con il denominatore comune $(s - \alpha)^2 + \omega^2$, nel numeratore $(R_a + iR_b)(s - \alpha + i\omega) + (R_a - iR_b)(s - \alpha - i\omega)$ le parti immaginarie si cancellano e resta $2R_a(s - \alpha) - 2R_b\omega$. I due termini sono, nella tabella, $2R_a e^{\alpha t} \cos \omega t$ e $-2R_b e^{\alpha t} \sin \omega t$.

□

Nei conti R_1 è un numero, e il coefficiente del coseno risulta il doppio della sua parte reale: basta fare i conti, senza ricordare la formula. L'Esercizio 1 ha una coppia $\pm i\omega$.

5 $\Phi(s)$ e polinomio minimo

In $\frac{R_1}{s - s_1}$ la radice s_1 si chiama **polo** e il coefficiente R_1 **residuo**, e la scomposizione in fratti semplici si chiama anche **scomposizione in poli e residui**. Il residuo di un polo complesso è complesso. Se $F(s)$ è una matrice di funzioni, i residui sono matrici delle stesse dimensioni, perché la loro somma divisa per i fattori deve dare F , e si calcolano con gli stessi limiti, elemento per elemento.

Con $\Phi(s) = (sI - A)^{-1}$ si calcola e^{At} per qualunque A , senza autovettori: si inverte $sI - A$ e si antitrasforma elemento per elemento. L'inversa è

$$\Phi(s) = \frac{\text{adj}(sI - A)}{d(s)}, \quad d(s) := \det(sI - A),$$

con adj la trasposta della matrice dei complementi algebrici. $d(s)$ è il polinomio caratteristico, e le sue radici sono gli autovalori di A .

Definizione – Polinomio minimo

Semplificando i fattori comuni fra $\text{adj}(sI - A)$ e $d(s)$, il denominatore che resta, cioè il minimo comune multiplo dei denominatori degli elementi di $\Phi(s)$, è il **polinomio minimo** $m(s)$.

Teorema – Le radici del polinomio minimo

$m(s)$ ha le stesse radici di $d(s)$, ciascuna con molteplicità al più uguale a quella in $d(s)$.

Dimostrazione

1. **Molteplicità.** $m(s)$ è $d(s)$ diviso per i fattori semplificati.
2. **Nessuna radice sparisce.** Se un autovalore λ_i non fosse radice di $m(s)$, $\Phi(s)$ sarebbe continua in λ_i . Passando al limite in $(sI - A)\Phi(s) = I$ si avrebbe $(\lambda_i I - A)\Phi(\lambda_i) = I$, ma $\lambda_i I - A$ non è invertibile.

□

Teorema – Diagonalizzabilità

A è diagonalizzabile se e solo se le radici di $m(s)$ sono tutte semplici. In questo caso, con $\lambda_1, \dots, \lambda_K$ gli autovalori distinti,

$$\Phi(s) = \sum_{i=1}^K \frac{R_i}{s - \lambda_i}$$

e i residui sono le matrici residue R_i del Capitolo 5, di rango uguale alla molteplicità algebrica di λ_i .

Dimostrazione

1. **Se A è diagonalizzabile**, per il Capitolo 5 $e^{At} = \sum_i e^{\lambda_i t} R_i$, che si trasforma termine a termine nella somma dei $\frac{R_i}{s - \lambda_i}$. Il denominatore comune è il prodotto dei $s - \lambda_i$, con radici semplici.
2. **Se le radici di $m(s)$ sono semplici**, $\Phi(s)$ si scompone come sopra e $e^{At} = \sum_i e^{\lambda_i t} R_i$. In $t = 0$ si ha $\sum_i R_i = I$.
3. **Le colonne dei residui sono autovettori**. Derivando, $A e^{At} = \sum_i \lambda_i e^{\lambda_i t} R_i$, e anche $A e^{At} = \sum_i e^{\lambda_i t} A R_i$. Le leggi distinte sono indipendenti, quindi $A R_i = \lambda_i R_i$.
4. **Bastano**. Ogni vettore è $x = \sum_i R_i x$, una somma di autovettori, quindi gli autovettori generano tutto lo spazio e se ne trovano n indipendenti.

□

Se $m(s)$ ha una radice multipla, nella scomposizione di $\Phi(s)$ compaiono fratti con $(s - \lambda_i)^k$, e quindi in e^{At} potenze di t davanti all'esponenziale.

Esempio – Un autovalore doppio

Per $A = I$ in $\mathbb{R}^2$, $d(s) = (s - 1)^2$ e

$$\Phi(s) = \left(\begin{array}{cc} s-1 & 0 \\ 0 & s-1 \end{array} \right)^{-1} = \frac{1}{(s-1)^2} \left(\begin{array}{cc} s-1 & 0 \\ 0 & s-1 \end{array} \right) = \frac{1}{s-1} I.$$

Il fattore $s - 1$ si semplifica e $m(s) = s - 1$, con radice semplice: A è diagonalizzabile, e infatti è già diagonale. Il residuo I ha rango 2, la molteplicità algebrica di 1, e $e^{At} = e^t I$.

6 Poli e modi

Le altre matrici in s sono

$$\Psi(s) = C \Phi(s), \quad H(s) = \Phi(s) B, \quad W(s) = C \Phi(s) B + D.$$

Moltiplicare per C o per B combina gli elementi di $\Phi(s)$, e il numeratore può acquisire fattori del denominatore, che si semplificano: i poli che restano sono una parte di quelli di $\Phi(s)$.

Proposizione – Poli e modi

Sia A diagonalizzabile. Un autovalore λ_i è un polo

1. di $\Phi(s)$ sempre,
2. di $\Psi(s)$ se e solo se il suo modo è osservabile,
3. di $H(s)$ se e solo se il suo modo è eccitabile,
4. di $W(s)$ solo se il suo modo è eccitabile e osservabile; se λ_i è semplice, o è una coppia complessa semplice, vale anche il viceversa.

Dimostrazione

1. **I residui.** Moltiplicando la scomposizione di $\Phi(s)$,

$$\Psi(s) = \sum_i \frac{C R_i}{s - \lambda_i}, \quad H(s) = \sum_i \frac{R_i B}{s - \lambda_i}, \quad W(s) - D = \sum_i \frac{C R_i B}{s - \lambda_i},$$

e λ_i è un polo se e solo se il suo residuo non è nullo.

2. **Il Capitolo 5.** $C R_i = 0$ se e solo se il modo è non osservabile, e $R_i B = 0$ se e solo se è non eccitabile. $C R_i B$ è nullo se lo è uno dei due fattori, e con λ_i semplice, o con una coppia complessa semplice, solo in quel caso (Capitoli 4 e 5).

□

Se un autovalore non è un polo di $W(s)$, il suo modo manca dalla risposta forzata in uscita, e $W(s)$ da sola non dice se è non eccitabile o non osservabile.

Esempio – Quattro autovalori distinti

Sia A con autovalori $-1, 0, 1, 2$, così $m(s) = d(s) = (s+1)s(s-1)(s-2)$. Se i modi osservabili sono quelli di $-1, 0, 1$ e gli eccitabili quelli di -1 e 2 , dopo le semplificazioni i denominatori sono:

matrice	poli	denominatore
$\Phi(s)$	tutti gli autovalori	$(s+1)s(s-1)(s-2)$
$\Psi(s)$	modi osservabili	$(s+1)s(s-1)$
$H(s)$	modi eccitabili	$(s+1)(s-2)$
$W(s)$	modi eccitabili e osservabili	$s+1$

Riepilogo

- **Metodo:** si scompone $F(s)$ in fratti semplici, si legge ogni fratto nella tabella e si moltiplica per $\delta_{-1}(t)$.
- **Polo semplice:** $R_i = \lim_{s \rightarrow s_i} (s - s_i) F(s)$, e $\frac{R_i}{s - s_i} \rightarrow R_i e^{s_i t}$.
- **Polo multiplo:** $R_{1j} = \frac{1}{(j-1)!} \frac{d^{j-1}}{ds^{j-1}} [(s - s_1)^r F]_{s_1}$, e $\frac{1}{(s - s_1)^k} \rightarrow \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{s_1 t}$.
- **Coppia complessa:** con $R_1 = R_a + iR_b$ il residuo di $\alpha + i\omega$, $2e^{\alpha t}(R_a \cos \omega t - R_b \sin \omega t)$.
- $\Phi(s)$: $(sI - A)^{-1} = \text{adj}(sI - A)/d(s)$, e antitrasformando si ha e^{At} .
- **Polinomio minimo:** le stesse radici di $d(s)$, con molteplicità minori o uguali; tutte semplici se e solo se A è diagonalizzabile.
- **Residui di Φ :** le matrici residue R_i , di rango uguale alla molteplicità algebrica.
- **Poli e modi:** in $\Psi(s)$ gli osservabili, in $H(s)$ gli eccitabili, in $W(s)$ solo modi eccitabili e osservabili.

7 Esercizi

Esercizio 1 – Risposta forzata a una sinusoide

Un sistema ha funzione di trasferimento $W(s) = \frac{1}{s+1}$. Calcola la risposta forzata in uscita all'ingresso $u(t) = \sin \omega t \delta_{-1}(t)$, con $\omega > 0$.

Soluzione a pagina 12 →

Esercizio 2 – I coefficienti di un polo triplo

Scomponi in fratti semplici e antitrasforma

$$F(s) = \frac{-s^3 - 5s^2 - 4s + 2}{(s+1)^3(s+2)}.$$

Soluzione a pagina 12 →

Esercizio 3 – Esonero del 14/11/2025 (fila A), Canale 1, Prof. Paolo Di Giamberardino, esercizio 3

Calcolare la risposta forzata del sistema descritto da $W(s) = \frac{1}{s}$ all'ingresso $u(t) = \cos 10t$.

Soluzione a pagina 13 →

Esercizio 4 – Appello del 24/07/2026, Canale 1, Prof. Paolo Di Giamberardino, esercizio 2, adattato

Dato il sistema

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0.5 & -1.5 \\ -1.5 & 0.5 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u, \quad y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x$$

- e. calcolare la funzione di trasferimento;
- f. calcolare la risposta forzata all'ingresso $u(t) = \cos(2t - 1)$.

Soluzione a pagina 13 →

Esercizio 5 – Appello del 18/02/2026, Canale 1, Prof. Paolo Di Giamberardino, esercizio 1, adattato

Sia dato il sistema

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u, \quad y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} x + u$$

- i. determinarne i modi naturali e studiarne le proprietà di eccitabilità ed osservabilità;
- ii. determinare, se esistono, tutti gli stati iniziali per i quali l'evoluzione libera nello stato risulti limitata;
- vi. determinarne la funzione di trasferimento e calcolare la risposta forzata all'ingresso $u(t) = t + e^{2t}$.

Soluzione a pagina 14 →

Esercizio 6 – Appello del 05/04/2024, Canale 1, Prof. Paolo Di Giamberardino, esercizio 1, adattato

Dato il sistema descritto da

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 4 \\ -1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t), \quad y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} x(t) - u(t)$$

- i. calcolarne il polinomio caratteristico e quello minimo;
- ii. calcolarne i modi naturali e studiarne eccitabilità ed osservabilità;
- v. calcolare la risposta per condizione iniziale $x_0 = (1 \ 1 \ 1)^T$ ed ingresso $u(t) = t^2 + 2t + 2$.

Soluzione a pagina 15 →

8 Soluzioni

Soluzione dell'Esercizio 1 – Risposta forzata a una sinusoide

In s . $Y_f(s) = W(s)U(s) = \frac{\omega}{(s+1)(s^2+\omega^2)}$, con un polo reale in -1 e la coppia $\pm i\omega$ ($\alpha = 0$).

Polo reale. $R_0 = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{\omega}{1 + \omega^2}$.

Coppia. Il residuo di $i\omega$ è

$$R_1 = \lim_{s \rightarrow i\omega} \frac{\omega}{(s+1)(s+i\omega)} = \frac{\omega}{(1+i\omega)2i\omega} = \frac{1}{2(i-\omega)} = -\frac{\omega+i}{2(1+\omega^2)},$$

quindi $R_a = -\frac{\omega}{2(1+\omega^2)}$ e $R_b = -\frac{1}{2(1+\omega^2)}$, e la coppia dà $2(R_a \cos \omega t - R_b \sin \omega t)$.

Nel tempo.

$$y_f(t) = \frac{1}{1+\omega^2} (\omega e^{-t} + \sin \omega t - \omega \cos \omega t) \delta_{-1}(t).$$

Controllo. $y_f(0) = 0$, e derivando si verifica $\dot{y}_f + y_f = \sin \omega t$, l'equazione del sistema $\dot{y} = -y + u$ di funzione di trasferimento $\frac{1}{s+1}$. Il termine e^{-t} viene dal polo del sistema, gli altri dai poli dell'ingresso.

[← Torna all'Esercizio 1, pagina 10](#)

Soluzione dell'Esercizio 2 – I coefficienti di un polo triplo

Polo semplice. $R_2 = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{-s^3 - 5s^2 - 4s + 2}{(s+1)^3} = \frac{8 - 20 + 8 + 2}{-1} = 2$.

Polo triplo. Si divide il numeratore per $s+2$:

$$G(s) = (s+1)^3 F(s) = \frac{-s^3 - 5s^2 - 4s + 2}{s+2} = -s^2 - 3s + 2 - \frac{2}{s+2},$$

e con $G'(s) = -2s - 3 + \frac{2}{(s+2)^2}$, $G''(s) = -2 - \frac{4}{(s+2)^3}$:

$$R_{11} = G(-1) = 2, \quad R_{12} = G'(-1) = 1, \quad R_{13} = \frac{G''(-1)}{2!} = -3.$$

Nel tempo. Sono i coefficienti dell'esempio della Sezione 3:

$$f(t) = ((t^2 + t - 3)e^{-t} + 2e^{-2t}) \delta_{-1}(t).$$

[← Torna all'Esercizio 2, pagina 10](#)

Soluzione dell'Esercizio 3 – Esonero del 14/11/2025 (fila A), Canale 1, Prof. Paolo Di Giamberardino, esercizio 3

In s . $U(s) = \frac{s}{s^2 + 100}$, e il fattore s si semplifica con il polo in 0 di W :

$$Y_f(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{s}{s^2 + 100} = \frac{1}{s^2 + 100} = \frac{1}{10} \cdot \frac{10}{s^2 + 100}.$$

Nel tempo. È la riga del seno con $\omega = 10$:

$$y_f(t) = \frac{1}{10} \sin 10t \delta_{-1}(t).$$

Controllo. $W(s) = \frac{1}{s}$ è un integratore, e infatti $\int_0^t \cos 10\tau \, d\tau = \frac{1}{10} \sin 10t$.

[← Torna all'Esercizio 3, pagina 10](#)

Soluzione dell'Esercizio 4 – Appello del 24/07/2026, Canale 1, Prof. Paolo Di Giamberardino, esercizio 2, adattato

e. $\det(sI - A) = (s - 0.5)^2 - 2.25 = (s - 2)(s + 1)$ e $(sI - A)^{-1}B = \frac{1}{s+1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, quindi

$W(s) = \frac{1}{s+1}$ (il modo di 2 non è eccitabile, Capitolo 8).

L'ingresso. $\cos(2t - 1) \delta_{-1}(t)$ non è un coseno ritardato, che sarebbe nullo prima di $t = \frac{1}{2}$. Si sviluppa il coseno della differenza:

$$u(t) = \cos 1 \cos 2t + \sin 1 \sin 2t, \quad U(s) = \frac{s \cos 1 + 2 \sin 1}{s^2 + 4}.$$

f. $Y_f(s) = \frac{s \cos 1 + 2 \sin 1}{(s + 1)(s^2 + 4)}$, con un polo in -1 e la coppia $\pm 2i$.

- In -1 : $R_0 = \frac{-\cos 1 + 2 \sin 1}{5}$.
- In $2i$: il numeratore è $2i \cos 1 + 2 \sin 1 = 2i e^{-i}$, quindi

$$R_1 = \frac{2i e^{-i}}{(1 + 2i) 4i} = \frac{(1 - 2i) e^{-i}}{10} = \frac{(\cos 1 - 2 \sin 1) - i(2 \cos 1 + \sin 1)}{10}.$$

Con $R_a = \frac{\cos 1 - 2 \sin 1}{10}$, $R_b = -\frac{2 \cos 1 + \sin 1}{10}$ e $\alpha = 0$, la coppia dà $2(R_a \cos 2t - R_b \sin 2t)$, e raccogliendo con le formule del coseno e del seno della differenza:

$$y_f(t) = \frac{1}{5} \left((2 \sin 1 - \cos 1) e^{-t} + \cos(2t - 1) + 2 \sin(2t - 1) \right) \delta_{-1}(t).$$

Controllo. $y_f(0) = \frac{1}{5}(2 \sin 1 - \cos 1 + \cos 1 - 2 \sin 1) = 0$, e $\dot{y}_f + y_f = \cos(2t - 1)$, l'equazione di $W(s) = \frac{1}{s+1}$.

[← Torna all'Esercizio 4, pagina 10](#)

Soluzione dell'Esercizio 5 – Appello del 18/02/2026, Canale 1, Prof. Paolo Di Giamberardino, esercizio 1, adattato

$\Phi(s)$. A è triangolare: $d(s) = (s-1)^2(s+1)$, e

$$\Phi(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s-1} & 0 & \frac{2}{(s-1)(s+1)} \\ 0 & \frac{1}{s-1} & \frac{2}{(s-1)(s+1)} \\ 0 & 0 & \frac{1}{s+1} \end{pmatrix}.$$

i. Modi. $m(s) = (s-1)(s+1)$ ha radici semplici, quindi A è diagonalizzabile, con l'autovalore 1 doppio e -1 semplice. Da $\frac{2}{(s-1)(s+1)} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1}$,

$$e^{At} = e^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e^{-t} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

con residui di rango 2 e 1: i modi sono e^t lungo l'autospazio generato da $(1 \ 0 \ 0)^T$ e $(0 \ 1 \ 0)^T$, ed e^{-t} lungo $(1 \ 1 \ -1)^T$. Poi

$$H(s) = \Phi(s)B = \frac{1}{s-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi(s) = C\Phi(s) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{s-1} & \frac{1}{s-1} \end{pmatrix}.$$

-1 non è polo né di H né di Ψ : il modo di -1 è non eccitabile e non osservabile, quello di 1 è eccitabile e osservabile.

ii. Lo stato libero è limitato se e solo se manca e^t , cioè se il residuo di 1 annulla x_0 : $x_{0,1} + x_{0,3} = 0$ e $x_{0,2} + x_{0,3} = 0$. Sono gli $x_0 = \alpha(1 \ 1 \ -1)^T$, $\alpha \in \mathbb{R}$, per i quali $x(t) = e^{-t}x_0$.

vi. $W(s) = C\Phi(s)B + 1 = \frac{1}{s-1} + 1 = \frac{s}{s-1}$, e con $U(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s-2}$

$$Y_f(s) = \frac{1}{s(s-1)} + \frac{s}{(s-1)(s-2)} = \left(-\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1}\right) + \left(-\frac{1}{s-1} + \frac{2}{s-2}\right) = -\frac{1}{s} + \frac{2}{s-2}.$$

I due residui in 1 si cancellano, perché $U(s) = \frac{(s-1)(s+2)}{s^2(s-2)}$ ha uno zero in 1 , e

$$y_f(t) = (2e^{2t} - 1)\delta_{-1}(t).$$

In $t = 0$ vale $1 = Du(0)$, il legame diretto.

[← Torna all'Esercizio 5, pagina 11](#)

Soluzione dell'Esercizio 6 – Appello del 05/04/2024, Canale 1, Prof. Paolo Di Giamberardino, esercizio 1, adattato

i. Sviluppando lungo la terza riga, $d(s) = s((s+3)^2 - 1) = s(s+2)(s+4)$, e

$$\Phi(s) = \begin{pmatrix} \frac{s+3}{(s+2)(s+4)} & -\frac{1}{(s+2)(s+4)} & \frac{4}{s(s+4)} \\ -\frac{1}{(s+2)(s+4)} & \frac{s+3}{(s+2)(s+4)} & \frac{4}{s(s+4)} \\ 0 & 0 & \frac{1}{s} \end{pmatrix}.$$

Il minimo comune multiplo dei denominatori è $s(s+2)(s+4)$: $m(s) = d(s)$, come deve essere con tre autovalori distinti.

ii. I modi sono e^{-4t} , e^{-2t} e la costante 1 (autovalore 0). Poi

$$H(s) = \begin{pmatrix} \frac{2(s+1)}{s(s+2)} \\ \frac{2}{s(s+2)} \\ \frac{1}{s} \end{pmatrix}, \quad \Psi(s) = \begin{pmatrix} \frac{s+3}{(s+2)(s+4)} & -\frac{1}{(s+2)(s+4)} & -\frac{1}{s+4} \end{pmatrix}.$$

I poli di H sono 0 e -2 , quelli di Ψ sono -2 e -4 :

- e^{-2t} è eccitabile e osservabile;
- 1 è eccitabile e non osservabile;
- e^{-4t} è osservabile e non eccitabile.

v. **Risposta libera.** $Y_\ell(s) = \Psi(s)x_0 = \frac{(s+3)-1}{(s+2)(s+4)} - \frac{1}{s+4} = 0$: x_0 è l'autovettore di 0, il cui modo non è osservabile.

Risposta forzata. $W(s) = C\Phi(s)B - 1 = -\frac{s+1}{s+2}$ e $U(s) = \frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} + \frac{2}{s} = \frac{2(s^2+s+1)}{s^3}$, quindi

$$Y(s) = -\frac{2(s+1)(s^2+s+1)}{s^3(s+2)}.$$

Il polo -2 è semplice: $R = \lim_{s \rightarrow -2} \left(-\frac{2(s+1)(s^2+s+1)}{s^3} \right) = -\frac{2 \cdot (-1) \cdot 3}{-8} = -\frac{3}{4}$. Per il polo triplo in 0, $G(s) = -\frac{2(s+1)(s^2+s+1)}{s+2} = -\frac{2(s^3+2s^2+2s+1)}{s+2}$, e con la divisione $G(s) = -2(s^2 + 2 - \frac{3}{s+2})$:

$$R_{11} = G(0) = -1, \quad R_{12} = G'(0) = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2},$$

$$R_{13} = \frac{G''(0)}{2!} = \frac{1}{2} \left(-4 + \frac{12}{8} \right) = -\frac{5}{4}.$$

Quindi

$$y(t) = \left(-\frac{t^2}{2} - \frac{3t}{2} - \frac{5}{4} - \frac{3}{4}e^{-2t} \right) \delta_{-1}(t).$$

In $t = 0$ vale $-2 = Du(0)$, e manca il modo e^{-4t} , non eccitabile.

[← Torna all'Esercizio 6, pagina 11](#)